ELEMENTI GENERALI
DELLE PRINCIPALI PARTI
DELLE
MATEMATICHE,
NECESSARJ ANCORA ALL' ARTIGLIERIA, E ALL' ARTE MILITARE.

Del Signor Abate DEIDIER,

Professor Regio di Matematiche nelle Scuole d'Artiglieria DE LA FERE.

TRADUZIONE DAL FRANCESE

DI ARDUINO, E MATTEO DANDOLO

NOBILI VENETI.

TOMO TERZO.

IN VENEZIA,
MDCCLXII.

APPRESSO MODESTO FENZO,
CON LICENZA DE' SUPERIORI, E PRIVILEGIO.

ELEMENTI DELLE PRINCIPALI PARTI DELLE MATEMATICHE.

LIBRO TERZO,

Che contiene le Regole dell' Aritmetica degl' Infiniti, e la loro applicazione alla Geometria; la Meccanica; la Statica; l' Idrostatica; l' Areometria, e l' Idraulica.

CAPITOLO PRIMO.

De' Principj dell' Aritmetica degl' Infiniti, e della loro applicazione alla Geometria, e alla Misura delle Superficie e de' Solidi.

1. MISURARE, o cercar'il valore d'una figura MNR (*Fig.* 1.) egli è cercare il valor della somma de' suoi elementi infinitamente prossimi AB, CD, ec. che la compongono. Ora, se questi elementi son tutti fra loro uguali *(Fig.* 2.), è manifesto, che la lor somma equivale al prodotto dell' ultimo elemento, o della sua base NR pel numero, che n' esprime la moltitudine, cioè per l' altezza, o per la retta MN, che sega perpendicolarmente tutti questi elementi: ma se gli elementi sono disuguali (*Fig.* 1.) noi non

possiamo trovar la loro somma che mediante 'l rapporto, cui essa ha al prodotto dell' ultimo, o massimo elemento NR moltiplicato per l'altezza MN, che n'esprime la moltitudine; e questo rapporto, come scorgesi, è 'l medesimo di quello della figura al rettangolo circonscritto NMHR.

2. Lo stesso dicasi de' solidi: se tutt' i piani elementari componenti un corpo son' uguali (*Fig.*4.), il valore di detto corpo, o la somma de' suoi elementi altro non è che 'l prodotto dell' elemento, o del piano XNRS pel numero, che n'esprime la moltitudine, cioè per l'altezza, o per la perpendicolare MN, che sega tutt'i suoi elementi: ma se i piani elementari d' un solido (*Fig.* 3.) sono disuguali, non si può conoscere il valore, o la somma degli elementi che mediante 'l rapporto di detta somma al prodotto dell' ultimo, o massimo elemento XNRS per l'altezza XM, che n'esprime la moltitudine; e questo rapporto è 'l medesimo di quello del solido al Prisma circonscritto XT.

3. La linea NM (*Fig.* 1.), la quale sega perpendicolarmente tutti gli elementi d' una figura, è dagli stessi divisa in infinite particelle uguali; però l'assisse MA, MC, ec. corrispondenti agli elementi, incominciando dalla prima al vertice M, ch'è infinitamente picciola, o zero fino all'ultima MN, sono fra loro come la serie infinita 0. 1. 2. 3. 4. 5. ec. de' numeri naturali; imperocchè, siccome vi vogliono infiniti elementi per comporre una superficie, così vi sono infinite assisse corrispondenti a detti elementi. Ora gli elementi d'una figura han sempre un rapporto noto, od ignoto alle loro assisse: p. e. nel triangolo (*Fig.* 5.) gli elementi AB, CD, ec. sono fra se come le lor' assisse MA, MC, ec. o come la serie infinita de' numeri naturali 0. 1. 2. 3. 4. 5. ec. nel compimento MNR della parabola ordinaria (*Fig. 6.*) gli elementi AB, CD, ec. sono fra se come i quadrati delle loro assisse, o come la serie infinita 0. 1. 4. 9. 16. ec. de' quadri della serie infinita de' numeri naturali 0. 1. 2. 3. 4. 5. ec. all'opposto nella parabola ordinaria (*Fig.* 7.), i quadrati degli elementi essendo fra loro come l'assisse, questi stessi elementi sono fra se come le radici quadre dell'assisse, o de' numeri 0. 1. 2. 3. 4. 5. ec. in infinito. In altre figure gli elementi sono fra loro come i cubi, o come le quarte, quinte, o settime potenze, ec. de' numeri 0. 1. 2. 3. 4. 5. ec. in infinito: in altre essi sono come le radici quadrate, o cube, o come le radici quarta, quinta, ec. de' numeri 0. 1. 2. 3. 4. 5. ec. in infinito. In al-

tre

tre finalmente essi possono essere come qualche potenza de' numeri o . 1 . 2 . 3 . ec. moltiplicata per un'altra potenza di questi stessi numeri, p. e. come i quadri moltiplicati per i cubi ; o sia come qualche potenza moltiplicata per qualche radice , o divisa per qualch'altra potenza, o per qualche radice ; ovvero come qualche potenza accresciuta, o diminuita di qualche altra potenza , o di qualche radice ; o pure come i quadri, i cubi , o le quarte potenze, ec. di qualche potenza accresciuta, o diminuita d' un' altra potenza, o radice ; ovvero in fine come medie proporzionali prese fra i termini d'una potenza, e quei d' un' altra potenza , o d' una radice, ec. il che, come già si scorge, può combinarsi in infiniti modi. Lo stesso dicasi degli Elementi componenti un solido.

4. Dato dunque il rapporto , che trovasi fra gli Elementi d' una figura, o d'un solido, le Regole *dell'Aritmetica degl' Infiniti* c'insegnano a rinvenir subito il valore della figura , o del solido, cioè'l rapporto della somma degli elementi all' ultimo e massimo elemento moltiplicato pel numero, che n'esprime la moltitudine, ovvero pel numero de' termini ; e questo rapporto , come già s'è detto, è lo stesso di quello della figura , o del solido al parallelogrammo , o prisma circonscritto. Ora queste regole dipendono dal seguente Problema, e dall'osservazioni, che si faranno sulla natura de' numeri, che appellans' *Infiniti*.

5. PROBLEMA. *Data qualsivoglia serie finita e determinata di numeri in progressione Aritmetica ascendente ritrovar la somma de' quadri di detti numeri, quella de' loro cubi, delle lor quarte potenze*, ec.

Sieno i numeri in progressione Aritmetica ascendente a, b, c , f, e fra se differiscano di qualsivoglia quantità, cui chiamerem d. Per sapere la somma de' quadri di questi numeri , piglio quello , che verrebbe immediatamente dietro all'ultimo f, se la progressione fosse continuata , i'appello x, e l'innalzo ad una potenza un grado più elevata di quella de' quadri ch' io cerco, cioè al cubo , ed ho x^3. Ora, siccome tutt' i termini della progressione si superano l' un l'altro d'una stessa quantità d, è manifesto, che $x = f + d$, e conseguentemente $x^3 = f^3 + 3ffd + 3fdd + d^3$: piglio i coefficienti delle potenze di f nel secondo membro di quest'equazione, cioè le grandezze, che moltiplicano le potenze di f, e che sono 1, $3d$, $3dd$; piglio altresì l'ultimo termine d^3, e 'l moltiplico per 4, che in quest'esempio è'l numero de' termini della data progressione, e ciò mi dà $4d^3$: così io ho le grandezze 1 ,

$3d$,

$3d$, $3dd$, $4d^3$, cui prendo per guida in questo modo. Considero la prima come rappresentante il cubo a^3 del primo termine della progressione, per avere innalzato x al cubo x^3; la seconda $3d$ come rappresentante la somma de' quadri, ch'io cerco, moltiplicata per $3d$, o pel triplo della differenza d della progressione; la terza $3dd$ come rappresentante la somma de' termini della progressione moltiplicata per $3dd$, o per lo triplo del quadro della differenza; in fine la quarta $4d^3$ come rappresentante la terza potenza d^3 della differenza moltiplicata per 4, o sia pel numero de' termini della progressione. Ciò fatto, dal cubo x^3 levo 1°. il cubo del primo termine della progressione, a motivo della grandezza 1, che mi rappresenta questo cubo. 2°. La somma de' termini della progressione moltiplicata per $3dd$, a cagione della terza grandezza $3dd$; e finalmente la terza potenza d^3 della differenza moltiplicata per 4, o sia pel numero de' termini: quindi, siccome altro non mi resta che la seconda grandezza $3d$, la quale rappresenta la somma de' quadri moltiplicata per $3d$, così divido 'l restante per $3d$, e 'l quoziente è la somma de' quadri cercati.

Così ancora, per sapere la somma de' cubi della progressione, piglio 'l termine x, che verrebbe immediatamente dietro all'ultimo, se la progressione fosse continuata, e l'innalzo un grado al di sopra de' cubi, ch'io cerco, cioè alla quarta potenza; il che mi dà x^4. Ora $x = f + d$; dunque $x^4 = f^4 + 4f^3d + 6ffdd + 4fd^3 + d^4$. Piglio i coefficienti 1, $4d$, $6dd$, $4d^3$ delle potenze di f nel secondo membro di quest' equazione, e l' ultimo termine d^4, ch'io moltiplico pel numero de' termini 4, il che fa $4d^4$; ed ho le grandezze 1, $4d$, $6dd$, $4d^3$, di cui io considero la prima come rappresentante la quarta potenza a^4 del primo termine della progressione, per essere stato x innalzato a detta potenza; la seconda $4d$ come rappresentante i cubi, ch' io cerco, moltiplicati per $4d$; la terza $6dd$ come rappresentante la somma de' quadri moltiplicata per $6dd$; la quarta $4d^3$ come rappresentante la somma de' termini moltiplicata per $4d^3$, e la quinta $4d^4$ come rappresentante la quarta potenza della differenza moltiplicata pel numero de' termini 4. Però da x^4 io levo 1°. la quarta potenza a^4 del primo termine della progressione, a motivo della prima grandezza 1; 2°. la somma dei quadri de' termini della progressione moltiplicata per $6dd$, a motivo della terza grandezza $6dd$; 3°. la somma de' termini della progressione moltiplicata per $4d^3$, a motivo della quarta grandezza $4d^3$; e finalmente la quar-

ta potenza d^4 della differenza d moltiplicata pel numero de'termini 4, a cagione della quinta grandezza $4d^4$: dopo di che, siccome altro non mi resta che la grandezza $4d$, la quale rappresenta la somma de' cubi moltiplicata per 4 volte la differenza, così io divido 'l restante per $4d$, e 'l quoziente è la somma de' cubi cercati.

Parimente, per sapere la somma delle quarte potenze della progressione, piglio 'l termine x, che verrebbe immediate dopo l'ultimo, e l'innalzo alla potenza x^5 elevata un grado al di sopra delle quarte potenze cercate: ora $x = f + d$; onde $x^5 = f^5 + 5f^4d + 10f^3dd + 10ffd^3 + 5fd^4 + d^5$. I coefficienti delle potenze di f nel secondo membro sono 1, $5d$, $10dd$, $10d^3$, $5d^4$: e l'ultimo termine moltiplicato pel numero de' termini 4 è $4d^5$: così io ho le 6 grandezze 1, $5d$, $10dd$, $10d^3$, $5d^4$, $4d^5$, di cui considero la prima 1 come rappresentante il primo termine della progressione innalzato alla stessa potenza di x; la seconda $5d$ come rappresentante le quarte potenze, ch' io cerco, moltiplicate per $5d$; la terza $10dd$ come rappresentante i cubi moltiplicati per $10dd$; la quarta $10d^3$ come rappresentante i quadri moltiplicati per $10d^3$; la quinta $5d^4$ come rappresentante la somma de' termini della progressione moltiplicata per $5d^4$; e la sesta $4d^5$ come rappresentante la quinta potenza della differenza d moltiplicata pel numero de' termini 4. Però da x^5 io levo 1°. la quinta potenza del primo termine a della progressione, a motivo della prima grandezza 1; 2°. la somma de'cubi moltiplicata per $10dd$, a cagione della terza grandezza $10dd$; 3°. la somma de' quadri moltiplicata per $10d^3$, a motivo della quarta grandezze $10d^3$; 4°. la somma de'termini della progressione moltiplicata per $5d^4$, a motivo della quinta grandezza $5d^4$; e finalmente la quinta potenza della differenza d moltiplicata pel numero de' termini 4: quindi, siccome altro non mi resta che la seconda grandezza $5d$, la quale rappresenta la somma delle quarte potenze moltiplicata per $5d$, così divido 'l restante per $5d$, e 'l quoziente è la somma cercata delle quarte potenze; il che ancora si farebbe per sapere la somma delle potenze più elevate.

Tal che la prima delle grandezze, ch' io prendo per guida, rappresenta sempre una potenza del primo termine a della progressione innalzata allo stesso grado di x; l' altre grandezze, dall' ultima in fuori, rappresentano le potenze discendenti de' termini della progressione dal grado, che si cerca, fino a' primi moltipli-

cati

cati per le quantità rappresentate dalle grandezze; l' ultima rappresenta sempre la differenza d elevata allo stesso grado di x, e moltiplicata pel numero de' termini; tutte le grandezze, dalla seconda in fuori, rappresentano ciò che si dee togliere da x elevato ad una potenza un grado maggiore di quella che si cerca, ed in fine dalla seconda comprendesi, quale sia 'l divisore, che dee dividere il rimanente, per avere la somma delle potenze cercate.

Chi vorrà in vece di lettere usar numeri, e fare i calcoli sopra indicati, scorgerà evidentemente la verità di questo Problema: tuttavolta se ne dia la dimostrazione.

Quando cerchiamo la somma de' quadrati della progressione Aritmetica ascendente a, b, c, f, la cui differenza è d, il cubo del termine x, che verrebbe immediatamente dietro all' ultimo, se la progressione fosse continuata, è x^3; ed egli è manifesto, che $x^3 = x^3 - f^3 + f^3 - c^3 + c^3 - b^3 + b^3 - a^3 + a^3$, perocchè tutt' i termini del secondo membro si distruggono con segni contrarj, eccettuato x^3, il quale in conseguenza è uguale al termine x^3 del primo membro: ora $x = f + d$; dunque $x^3 = f^3 + 3ffd + 3fdd + d^3$, e però $x^3 - f^3 = 3ffd + 3fdd + d^3$. Così pure $f = c + d$; onde $f^3 = c^3 + 3ccd + 3cdd + d^3$, ed $f^3 - c^3 = 3ccd + 3cdd + d^3$. Parimente $c = b + d$; però $c^3 = b^3 + 3bbd + 3bdd + d^3$, e $c^3 - b^3 = 3bbd + 3bdd + d^3$. In fine $b = a + d$; dunque $b^3 = a^3 + 3aad + 3add + d^3$, e quindi $b^3 - a^3 = 3aad + 3add + d^3$; onde nella nostra equazione $x^3 = x^3 - f^3 + f^3 - c^3 + c^3 - b^3 + b^3 - a^3 + a^3$ sostituendo i valori di $x^3 - f^3$, $f^3 - c^3$, $c^3 - b^3$ e $b^3 + a^3$ da noi ritrovati, avremo:

$$
\begin{aligned}
x^3 = {} & 3ffd + 3fdd + d^3 \\
& + 3ccd + 3cdd + d^3 \\
& + 3bbd + 3bdd + d^3 \\
& + 3aad + 3add + d^3 \\
& + a^3
\end{aligned}
$$

Dal che si comprende, che 'l cubo x^3 contiene 1°. il cubo a^3 del primo termine della progressione; 2°. la somma de' quadri aa, bb, cc, ff della progressione moltiplicati per $3d$; 3°. la somma de' termini a, b, c, f moltiplicati per $3dd$; 4°. in fine il cubo d^3 della differenza d preso quattro volte, ovvero moltiplicato pel numero de' termini 4: però se da x^3 noi leviamo il cubo a^3, più

più la somma $a + b + c + d$ moltiplicata per $3dd$, e finalmente il cubo d^3 preso quattro volte, cioè $4d^3$, il residuo sarà la somma de' quadri moltiplicati per $3d$; e in conseguenza dividendo per $3d$, avremo la somma de' quadri. Ora le grandezze prese per guide ci hanno indicato le stesse operazioni; ond' elle ci han prescritto quello che si dovea fare.

Parimente, quando cercasi la somma de' cubi della progressione a, b, c, f, la quarta potenza di x è x^4, e noi abbiamo $x^4 = x^4 - f^4 + f^4 - c^4 + c^4 - b^4 + b^4 - a^4 + a^4$: ora $x = f + d$; onde $x^4 = f^4 + 4f^3d + 6ffdd + 4fd^3 + d^4$, e perciò $x^4 - f^4 = 4f^3d + 6ffdd + 4fd^3 + d^4$: così pure $f = c + d$; dunque $f^4 = c^4 + 4c^3d + 6ccdd + 4cd^3 + d^4$, ed $f^4 - c^4 = 4c^3d + 6ccdd + 4cd^3 + d^4$: similmente $c = b + d$; onde $c^4 = b^4 + 4b^3d + 6bbdd + 4bd^3 + d^4$, e quindi $c^4 - b^4 = 4b^3d + 6bbdd + 4bd^3 + d^4$: finalmente $b = a + d$; dunque $b^4 = a^4 + 4a^3d + 6aadd + 4ad^3 + d^4$, e per conseguente $b^4 - a^4 = 4a^3d + 6aadd + 4ad^3 + d^4$; però nella nostra equazione $x^4 = x^4 - f^4 + f^4 - c^4 + c^4 - b^4 + b^4 - a^4 + a^4$; sostituendo i valori di $x^4 - f^4$, $f^4 - c^4$, $c^4 - b^4$ e $b^4 - a^4$ da noi ritrovati, avremo:

$$\begin{aligned} x^4 = \;& 4f^3d + 6ffdd + 4fd^3 + d^4 \\ & + 4c^3d + 6ccdd + 4cd^3 + d^4 \\ & + 4b^3d + 6bbdd + 4bd^3 + d^4 \\ & + 4a^3d + 6aadd + 4ad^3 + d^4 \\ & + a^4 \end{aligned}$$

Donde si scorge, che x^4 contiene 1°. la quarta potenza a^4 del primo termine a della progressione; 2°. i cubi a^3, b^3, c^3, f^3 moltiplicati per $4d$; 3°. i quadri aa, bb, cc, ff moltiplicati per $6dd$; 4°. la somma de' termini a, b, c, f moltiplicati per $4d^3$; 5°. in fine la quarta potenza d^4 della differenza d presa quattro volte, cioè moltiplicata pel numero de' termini 4. Se dunque da x^4 noi leviamo la quarta potenza a^4, più i quadri moltiplicati per $6dd$, più la somma de' termini moltiplicata per $4d^3$, e finalmente $4d^4$, il residuo sarà la somma de' cubi moltiplicata per $4d$; e per consegnenza dividendo questo residuo per $4d$, il quoziente sarà la somma de' cubi. Ora le grandezze prese per guide ci hanno indicato le stesse operazioni; dunque elle ci han prescritto ciò che aveasi a fare; e lo stesso ancora noi dimostreremo rispetto alle potenze più elevate.

6. AVVERTIMENTO. Parlando de' mucchj delle palle di cannone (*Lib.* 1°. *N.* 267.) ho detto, che se pigliasi un numero di termini finito nella serie 0. 1. 2. 3. 4. 5, ec. de'numeri naturali, e che si facciano i quadri de' termini presi, la somma di essi quadri è al maggiore moltiplicato pel numero de'termini come 1 a 3, più come 1 alla radice del maggiore moltiplicato per 6; e quindi io ho dedotto una formula assai facile, onde trovare la somma delle palle contenute in una piramide, ovvero in un mucchio quadro. Ma siccome io non ho ciò dimostrato che per induzione, la quale da molti non viene annoverata fra le pruove Geometriche, così voglio dimostrarlo con tutta l' esatezza giusta le cose da me premesse; il che farà nel medesimo tempo vedere l' accordo de' principj.

Sieno dunque i termini 0. a. b. c. x, di cui l' ultimo è x, e la differenza è 1; quindi il numero de' termini sarà $x+1$, poichè la progressione comincia da zero, e i quadrati saranno 0. a^2. b^2. c^2. x^2: così l' ultimo termine moltiplicato pel numero de' termini $x+1$ sarà x^3+x^2. Ora il termine, che verrebbe immediatamente dietro all' ultimo x, se si continuasse la progressione, è $x+1$, e'l suo cubo è $x^3+3xx+3x+1$; onde prendendo in questo cubo i coefficienti 1. 3. 3 delle potenze di x, e moltiplicando l' ultimo termine 1 pel numero de' termini $x+1$, il che fa $x+1$, le quattro grandezze 1. 3. 3. $x+1$ mi danno a vedere, che dal cubo $x^3.+3xx+3x+1$ conviene levare 1°. il cubo del primo termine 0, il qual' è zero; 2°. la somma de'termini moltiplicata per 3; 3°. la terza potenza della differenza 1 moltiplicata pel numero de'termini, e in fine dividere il residuo per tre; ciò che darà al quoziente la somma de' quadri. Ma la somma de'termini è $\frac{xx+x}{2}$, cioè l' ultimo termine x e'l primo zero moltiplicati per la metà $\frac{x+1}{2}$ del numero de' termini $x+1$; però moltiplicando questa somma per 3, avremo $\frac{3xx+3x}{2}$; il che sottrato dal cubo $x^3+3xx+3x+1$, s' avrà un residuo $x^3+\frac{3xx}{2}+\frac{3x}{2}+1$, da cui togliendo ancora la terza potenza della differenza moltiplicata pel numero de' termini, cioè $x+1$, il residuo sarà $x^3+\frac{3xx}{2}+\frac{x}{2}$,

ov-

ovvero $x^3+x^2+\frac{xx+x}{2}$: così dividendo questo residuo per 3, il quoziente $\frac{x^3+x^2}{3}+\frac{xx+x}{6}$ sarà la somma de' quadri. Ora moltiplicando le grandezze superiori ed inferiori della seconda frazione per x, il che punto non ne altera il valore, la somma de' quadrati è $\frac{x^3+x^2}{3}+\frac{x^3+x^2}{6x}$; e questa somma è all' ultimo termine moltiplicato pel numero de' termini, cioè ad x^3+x^2, come $\frac{x^3+x^2}{3}+\frac{x^3+x^2}{6x}$ è ad x^3+x^2, ovvero come $\frac{1}{3}+\frac{1}{6x}$ è ad 1; dunque la somma de' quadri è all' ultimo moltiplicato pel numero de' termini, come 1 a 3, più come 1 a $6x$.

Ora, perchè la somma de' quadrati è $\frac{x^3+x^2}{3}+\frac{xx+x}{6}$, se si moltiplicano le grandezze superiori ed inferiori della prima frazione per 2, s'avrà $\frac{2x^3+2x^2+x^2+x}{6}$, ovvero $\frac{2x^3+3x^2+x}{6}$, ch' è la stessa formula generale, cui abbiam ritrovato (*Lib.1.N.267.*); il che chiaramente dimostra, che l'induzione da noi usata in detto luogo ci ha condotti allo scoprimento della verità.

Si potrebbero in somigliante guisa trovar delle formule; onde avere la somma de' cubi, delle quarte, quinte potenze, ec. de' termini d'una progressione finita 0. 1. 2. 3, ec. ma siccome dette formule diverrebbero troppo implicate, e perchè in oltre il metodo di questo Problema è più generale, così per non iscostarci dal nostro soggetto pensiamo di non farne parola.

Osservazioni circa i numeri Infiniti.

7. Un numero *a* dicesi *parte aliquota* d' un' altro numero *b*, quando egli è contenuto esattamente un dato numero di volte in *b*.

8 *Una parte aliquota* a *d' un numero* b *è tanto minore, quanto più ella è contenuta in* b.

Ciò è evidente; perocchè se *a* è contenuto tre volte in *b*, egli è certo minore di quello sarebbe, se non vi fosse contenuto che due.

9. Se dunque un numero *a* è contenuto in un' altro *b* più di quello si possa esprimere da qualunque numero per grande ch' ei si sia, *a* sarà una parte aliquota *infinitamente picciola* di *b*.

 10. Un

10. *Un numero* a, *parte aliquota infinitamente picciola d'un' altro numero* b, *rispetto a* b *è uguale a zero*.

Imperocchè rispetto a b egli è minore della minima parte aliquota di b, ch'esprimere e concepir si possa.

11. Però un numero b, accresciuto, o diminuito d' una parte aliquota infinitamente picciola a, non differisce da ciò, ch'egli era prima dell'aumento, o della diminuzione; perocchè la differenza, che vi si può assegnare, è più picciola della minima parte aliquota di b, che concepir si possa.

12. Se dunque due numeri b e c non differiscono fra loro che d'una grandezza a infinitamente picciola rispetto all' uno e all' altro, essi sono fra lor perfettamente uguali.

13. Un numero x dicesi *infinito*, quando contiene qualsivoglia numero a noto e determinato più di quello esprimer si possa da un'altro numero per grande ch' egli si sia.

14. Onde ciascun numero noto e determinato, per grande che sia, è una parte aliquota infinitamente picciola d' un numero infinito x.

15. *Il prodotto* ab *di due numeri* a, b *determinati, per grandi che sieno, è infinitamente picciolo rispetto ad un numero infinito* x.

Perocchè il numero determinato a nel prodotto ab è contenuto un numero di volte, il quale può esser'espresso dal numero determinato b; ed in conseguenza il prodotto ab, non essendo infinito, altro non è ch'una parte aliquota infinitamente picciola del numero infinito x.

16. Quindi, se moltiplicasi una parte infinitamente picciola a d'un numero infinito x con un numero determinato b, per grande ch'ei si sia, il prodotto ab è altresì infinitamente picciolo rispetto ad x.

17. *Qualunque parte aliquota, ch'esprimer si possa, d'un numero infinito* x *è ancora infinitamente grande rispetto ad* x, *per picciola che sia*.

Supponiamo, ch' y sia la parte aliquota d'x, ed a il numero, che denota quante volte y contiensi in x; dunque 'l prodotto ya di $y \times a$ sarà uguale ad x, e per conseguente sarà infinito: ora il numero a essendo determinato, perchè si può esprimere, è contenuto nell'infinito x, ovvero ya più di quello possa esser' espresso da qualunque immaginabil numero per grande che sia (N. 13.); onde la grandezza y, che dinota quante volte a è contenuto in

ya,

ga, è maggiore del massimo numero, ch' immaginar si possa, ed in conseguenza è infinita.

18. *Ciascun numero infinito* x *è infinitamente picciolo rispetto al suo quadrato* xx; *il suo quadro* x^2 *è infinitamente picciolo rispetto al suo cubo* x^3; *il suo cubo* x^3 *è infinitamente picciolo rispetto alla sua quarta potenza* x^4, *e così successivamente.*

Il quadro xx altro non è che 'l numero infinito x moltiplicato per se stesso, ovvero preso tante volte, quante sono l' unità, che in esso si contengono: ora il numero d' unità contenute in x è maggiore di quello si possa esprimere da qualsivoglia numero per grande ch' egli sia; onde x è contenuto in xx più di quello esprimer si possa, ed in conseguenza egli è parte aliquota infinitamente picciola di xx (*N. 9*). Parimente, altro non è il cubo x^3 che 'l quadro xx moltiplicato per x, ovvero preso tante volte, quante sono l' unità, che in x si contengono; dunque xx è in x^3 più volte di quello esprimer si possa; e però egli è infinitamente picciolo rispetto ad x^3: lo stesso noi proveremo rispetto alle potenze superiori di x.

19. Vi sono adunque degl' infinitamente piccioli d' infinitamente piccioli in infinito: p. e. essendo ciascun numero noto e determinato infinitamente picciolo rapporto ad un numero infinito x, ch' è infinitamente picciolo rispetto al suo quadrato, è manifesto, che qualunque numero noto a rispetto al quadrato xx è un' infinitamente picciolo d' un' infinitamente picciolo x, ovvero un' infinitamente picciolo del secondo genere; e per la stessa ragione qualunque numero noto a rispetto ad x^3 è un' infinitamente picciolo d' un' infinitamente picciolo x d' un' altro infinitamente picciolo xx, cioè a è un' infinitamente picciolo del terzo genere, ec.

20. AVVERTIMENTO. Prima che c' innoltriamo, sarà bene tornarci alla memoria quanto s' è detto circa 'l Calcolo degli Esponenti (*Lib. 1. N.* 153. 154. ec.), cioè 1°. Che le potenze ascendenti d' una grandezza a sono a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, ec. le quali hanno per esponenti i numeri 1, 2, 3, 4, ec. 2°. Che se dividesi la prima potenza a^1 per se stessa, s' avrà $a^0 = 1$, il cui esponente è zero. 3°. Che per moltiplicare una potenza a^2 per un' altra a^3 non si fa che unire insieme gli esponenti 2 e 3, il che dà 5 di prodotto, e scriver per prodotto a^5. 4°. Che per dividere una potenza a^6 per un' altra a^3 conviene dall' esponente 6 del dividendo toglier l' esponente 3 del divisore, dopo di che resta 3, e scrivere a^3 per quoziente. 5°. Che per innalzare qualsivoglia po-

potenza a^2 ad un'altra potenza, p. e. alla terza, fa di mestiere moltiplicar l'esponente 2 di a^2 per l'esponente 3 della potenza, a cui si vuol'innalzare a^2, il che fa 6, e quindi scriver' a^6. 6°. Che per estrarre qualsivoglia radice, p. e. la terza d'una potenza a^6, conviene divider l'esponente 6 della potenza a^6 per l'esponente 3 della radice, che si vuol'estrarre, ciò che fa 2, e quindi scrivere a^2. 7°. Finalmente, che le radici 2ª. 3ª. 4ª., ec. di a^1 s'esprimono per $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{4}}$, ec. che hanno per esponenti $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ec. nel modo stesso che le radici 3ª. 4ª. 5ª. ec. di a^2 s'esprimono per $a^{\frac{2}{3}}$, $a^{\frac{2}{4}}$, $a^{\frac{2}{5}}$ ec. e così dell'altre; tal che, quando l'esponente di a è una frazione qualunque, p. e. $\frac{3}{4}$, il numerator 3 rappresenta la potenza, a cui è innalzata la grandezza a, e 'l denominator 4 la radice, che si vuol' estrarre da detta potenza.

21. DIFFINIZIONE. Se pigliasi la serie infinita de' numeri naturali 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6, ec. x, la quale comincia da zero e termina all'infinito x, l'esponente di detta serie sarà 1, poichè ciascun termine di essa è al primo grado; quello della serie de' quadrati di questi stessi numeri sarà 2, poichè ciascun termine è al secondo grado; quello della serie de' loro cubi sarà 3, e così a mano a mano. Del pari, l'esponente della serie delle lor radici quadre sarà $\frac{1}{2}$; quello della serie delle lor radici cube sarà $\frac{1}{3}$, ec. e dividendo ciascun termine della serie 0. 1. 2. 3, ec. per se stesso, s'avrà una serie infinita d'unità 1, 1, 1, 1, ec. il cui esponente sarà zero, perocchè una prima potenza a divisa per se stessa è a^0, e 'l suo esponente è zero.

In tutte queste serie il numero de' termini sarà sempre $x + 1$, cioè l'ultimo termine x della prima serie 0. 1. 2. 3. 4. 5, ec. accresciuto dell'unità; imperocchè, se la progressione cominciasse da 1, è manifesto, che l'ultimo termine x sarebbe uguale al numero de' termini: ma siccome ella comincia da zero, il che ci dà un termine di più, così 'l numero de' termini esser dee $x + 1$.

22. PROPOSIZIONE Iª. *Se pigliasi la serie infinita de' numeri naturali* 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6, *ec.* x, *quella de' quadri di detti numeri, de' loro cubi, delle lor quarte potenze, e così in infinito, la somma di ciascuna d'esse sarà sempre all'ultimo e massimo termine moltiplicato pel numero de' termini, come* 1 *è all'esponente della serie accresciuta dell'unità.*

Es-

Essendo la serie o. 1. 2. 3. 4, ec. una progressione aritmetica, si ha la sua somma, aggiugnendo 'l primo all' ultimo termine, e moltiplicando la somma o $+ x$ per la metà del numero de' termini $x + 1$, cioè per $\frac{x+1}{2}$ (*Lib.* 1. *N.* 251.); onde la somma de' termini è $\frac{xx+x}{2}$, ovvero $\frac{xx}{2}$; perocchè x essendo infinitamente picciolo rispetto ad xx (*N.* 18.), egli è in conseguenza nulla rispetto ad xx: ora l'ultimo termine x moltiplicato pel numero de' termini $x + 1$ è $xx + x$, ovvero xx per la ragione sopra indicata; dunque la somma de' termini è all'ultimo moltiplicato pel numero de' termini, come $\frac{xx}{2}$ è ad xx, ovvero come $\frac{1}{2}$ ad 1, o come 1 a 2, cioè come l'unità è all'esponente 1 della serie accresciuta dell'unità.

Nella serie de' quadrati de' numeri o. 1. 2. 3. 4, ec x l'ultimo quadro xx moltiplicato pel numero de' termini $x + 1$ si è $x^3 + x^2$, o soltanto x^3, per essere x^2 infinitamente picciolo rispetto ad x^3 (*N.* 18.): ora, a fine d' avere la somma de' quadrati, prendo il termine $x + 1$, che verrebbe dietro all'ultimo, se la progressione potesse esser continuata, e giusta le regole date sopra (*N.*5.) innalzo $x + 1$ al cubo, il che mi dà $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, o semplicemente x^3; poichè essendo x^2 infinitamente picciolo rispetto ad x^3 (*N.* 18.), il termine $3x^2$ è ancora infinitamente picciolo (*N.* 16.); e per la stessa ragione i termini $3x$ ed 1 sono pure infinitamente piccioli rispetto ad x^3: così 'l cubo del termine $x + 1$ non differisce dal quadro xx moltiplicato pel numero de'termini. Ora i coefficienti di x in $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ sono 1, 3, 3, e l' ultimo termine 1 moltiplicato pel numero de' termini è $x + 1$; dal che si scorge, che per avere la somma de' quadrati conviene dal cubo di $x + 1$, ovvero dal quadro xx moltiplicato pel numero de' termini sottrarre 1°. il cubo del primo termine o della progressione, il qual'è zero; 2°. la somma de' termini $\frac{x^2+x}{2}$ ovvero $\frac{x^2}{2}$ moltiplicato per 3, cioè $\frac{3x^2}{2}$, il ch'è infinitamente picciolo rispetto ad $x^3 + x^2$, o soltanto x^3 (*N.* 18. 16.); 3°. il termine $x + 1$, ch'è ancora nulla rispetto ad x^3, ovvero al quadro xx moltiplicato pel numero de' termini; dunque dopo tutte queste sottrazioni il cubo di

di $x + 1$, ovvero'l quadro xx moltiplicato pel numero de' termini non farà diverso da quello era prima: ma la feconda grandezza 3 m' addita di dover' in fine dividere il restante per 3; onde dividendo per 3 il cubo di $x + 1$, ovvero'l quadro xx moltiplicato pel numero de' termini, il quoziente $\frac{x^3}{3}$ farà la fomma de' termini, e però questa fomma farà all'ultimo quadro moltiplicato pel numero de' termini, cioè ad x^3, come $\frac{x^3}{3}$ ad x^3, o come $\frac{1}{3}$ ad 1, o finalmente 1 a 3, cioè come 1 è all' esponente 2 della ferie de' quadri accrefciuto dell'unità.

Nella ferie de' cubi de' numeri $0. 1. 2. 3. 4. 5$, ec. x, l' ultimo cubo x^3 moltiplicato pel numero de' termini $x + 1$ fi è $x^4 + x^3$, o foltanto x^4, per effere x^3 infinitamente picciolo rifpetto ad x^4 (*N.* 18.) : ora, a fine d' aver la fomma de' cubi fecondo le regole affegnate fopra (*N.* 5.), piglio 'l termine $x + 1$, che verrebbe dietro all'ultimo x, e l'innalzo alla quarta potenza, ch'è $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$, o femplicemente x^4; perocchè, effendo x^3 infinitamente picciolo rifpetto ad x^4, il fecondo termine $4x^3$ è ancora infinitamente picciolo rifpetto ad x^4 (*N.* 16.), e circa gli altri termini $6x^2$, $4x^2$, ed 1, è manifesto, effer questi degl' infinitamente piccioli d' infinitamente piccioli (*N.* 19.), ed effere in confeguenza, per così dire, meno ancora di nulla rifpetto ad x^4: così la quarta potenza del termine $x + 1$ non differifce dall'ultimo cubo x^3 moltiplicato pel numero de' termini. Ora i coefficienti d' x in $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ fono $1, 4, 6, 4$, e l'ultimo termine 1 moltiplicato pel numero de' termini è $x + 1$; onde io ho cinque grandezze $1, 4, 6, 4, x + 1$, le quali m' additano di dover dalla quarta potenza d'$x + 1$, ovvero dall' ultimo cubo moltiplicato pel numero de' termini, cioè da x^4 togliere 1°. la quarta potenza del primo termine o della progreffione, ch' è zero; 2°. la fomma $\frac{x^3}{3}$ de' quadri moltiplicata per 6, cioè $\frac{6x^3}{3}$, ovvero $2x^3$, il ch' è infinitamente picciolo rifpetto ad x^4; 3°. la fomma $\frac{x^2}{2}$ della progreffione moltiplicata per 4, o $\frac{4x^2}{2}$, o $2x^2$, il ch'è un'infinitamente picciolo d'infinitamente picciolo rapporto ad x^4; ed in fine il termine $x + 1$, ch'è un' infinitamente picciolo del terzo

zo genere rispetto ad x^4; dunque dopo tutte queste sottrazioni x^4 resterà qual'era prima: ma a cagione della seconda grandezza 4, per avere la somma de'cubi, conviene divider' il residuo per 4; però dividendo x^4 per 4, la somma de'cubi sarà $\frac{x^4}{4}$, e questa somma sarà all'ultimo cubo x^3 moltiplicato pel numero de' termini, come $\frac{x^4}{4}$ è ad x^4, o come $\frac{1}{4}$ è ad 1, o come 1 a 4, cioè come 1 è all' esponente 3 della serie de' cubi accresciuto dell' unità.

Lo stesso si proverebbe circa le serie delle quarte, quinte potenze, ec.

23. COROLLARIO I°. Se dividiamo ciascun termine della serie 0, 1, 2, 3, 4, 5, ec. x per se stesso, è manifesto, ch' avremo una serie infinita d' unità, la quale sarà all' ultimo termine moltiplicato pel numero de' termini, come 1 ad 1: ora l'esponente di questa serie d' unità è zero (*N.* 21.); onde la somma sarà ancora all' ultimo termine moltiplicato pel numero de' termini, come 1 è all' esponente zero accresciuto dell' unità.

Noi chiameremo *Serie degli eguali* la serie composta d' unità.

24. COROLLARIO II. I rapporti della serie degli eguali, di quella delle prime, terze, quarte potenze, ec. a'loro ultimi termini moltiplicati pel numero de' termini son dunque $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, ec. così, quando gli esponenti 0, 1, 2, 3, 4, ec. di queste differenti serie sono in progressione aritmetica, i rapporti delle stesse ai loro ultimi termini moltiplicati pel numero de' termini son tutte frazioni, le quali hanno l' unità per numeratore, e i cui denominatori 1, 2, 3, 4, 5, ec. son pure in progressione aritmetica.

25. PROPOSIZIONE II. *Se prendiamo le serie delle radici quadre de' numeri* 0, 1, 2, 3, 4, 5, ec. x, *che terminano all' infinito* x, *e quelle delle lor radici cube, quarte, ec. il rapporto d'ognuna d' esse al loro ultimo termine moltiplicato pel numero de' termini sarà come* 1 *all' esponente della serie accresciuto dell' unità.*

La serie delle radici quadrate ha per esponente $\frac{1}{2}$, ch'è medio aritmetico fra l' esponente 0 della serie degli eguali e l' esponente 1 della serie delle prime potenze 0, 1, 2, 3, 4, ec. x; onde il denominatore del rapporto della serie delle radici all' ultimo termine moltiplicato pel numero de' termini esser dee medio aritmetico fra'l denominatore 1 del rapporto $\frac{1}{1}$ della serie degli egua-

li e'l denominator 2 del rapporto $\frac{1}{2}$ della serie delle prime potenze (*N.* 24.) ; però pigliando un medio aritmetico fra 1 e 2, il qual'è $\frac{3}{2}$, il rapporto della serie delle radici quadre al loro ultimo termine moltiplicato pel numero de' termini sarà come 1 a $\frac{3}{2}$, ovvero come 1 all' esponente $\frac{1}{2}$ accresciuto dell' unità, poichè $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$; e questo rapporto può cangiarsi in quello di 2 a 3, essendo 1 a $\frac{3}{2}$ come $\frac{2}{2}$ a $\frac{3}{2}$, ovvero come 2 a 3.

Così pure, l'esponente della serie delle radici cube è $\frac{1}{3}$, ed egli è'l primo de'due medj aritmetici fra l'esponente o della serie degli eguali e l'esponente 1 della serie delle prime potenze 0, 1, 2, 3, ec, x, giacchè i due medj aritmetici fra 0 ed 1 sono $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$; onde il denominatore del rapporto delle radici cube al loro ultimo termine moltiplicato pel numero de' termini esser dee il primo de'due medj aritmetici fra'l denominatore 1 del rapporto degli eguali e'l denominator 2 del rapporto delle prime potenze (*N.* 24.) ; però pigliando due medj aritmetici $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$ fra 1 e 2, il rapporto della serie delle radici cube al loro ultimo termine moltiplicato pel numero de'termini è come 1 a $\frac{4}{3}$, ovvero come 1 all'esponente $\frac{1}{3}$ della serie accresciuto dell'unità, giacchè $\frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$; e questo rapporto può cangiarsi in quello di 3 a 4, essendo 1 a $\frac{4}{3}$ come $\frac{3}{3}$ a $\frac{4}{3}$, o come 3 a 4.

Così ancora, l'esponente della serie delle quarte radici de' numeri 0, 1, 2, 3, 4, ec. x è $\frac{1}{4}$, ed egli è'l primo de'tre medj aritmetici $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ fra l'esponente o della serie degli eguali e l'esponente 1 della serie 0, 1, 2, 3, 4, ec. x ; dunque'l denominatore del rapporto della serie delle quarte potenze al loro ultimo termine moltiplicato pel numero de' termini esser dee il primo de'tre medj aritmetici fra'l denominatore 1 del rapporto della serie degli eguali e'l denominator 2 del rapporto della serie 0, 1, 2, ec. x (*N.* 24.) ; onde pigliando tre medj aritmetici $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{7}{4}$ fra 1 e 2, il rapporto della serie delle quarte radici al loro ultimo termine moltiplicato pel numero de' termini è come 1 a $\frac{5}{4}$, cioè come 1 all'esponente $\frac{1}{4}$ accresciuto dell' unità, poichè $\frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$; e questo rapporto può cangiarsi in quello di 4 a 5, per essere 1 a $\frac{5}{4}$ come $\frac{4}{4}$ a $\frac{5}{4}$, ovvero come 4 a 5 ; il che noi proveremo ancora rispetto all' altre radici.

26. COROLLARIO I°. Se moltiplicansi i termini d' alcuna delle dette serie ; p. e. della serie de'quadrati, il cui esponente è 2, per quei d' un'altra, p. e. della serie de'cubi, il cui esponente è 3, s' avrà un'altra serie, il cui esponente sarà la somma degli

gli esponenti 2 e 3 (*N.*20.): però le quinte potenze essendo i termini di detta serie, il rapporto della lor somma all'ultimo termine moltiplicato pel numero de' termini sarà come 1 all' esponente 5 accresciuto dell' unità, cioè come 1 a *6* (*N.* 22.); e così degli altri.

Parimente, se dividonsi i termini d' una serie, p. e. della serie delle quinte potenze, il cui esponente è 5, per quei d' un' altra, il cui esponente è minor di 5, e. g. della serie de' cubi, il cui esponente è 3, s' avrà una nuova serie, il cui esponente positivo 2 sarà la differenza de' due esponenti 5 e 3 (*N.* 20.); e in conseguenza, poichè i quadri sono li termini di detta serie, il rapporto della lor somma al loro ultimo termine moltiplicato pel numero de' termini sarà come 1 all' esponente 2 accresciuto dell' unità, o come 1 a 3 (*N.* 22.); e così degli altri.

27. COROLLARIO II. Ma se dividonsi i termini d' una serie per quei d' un' altra, ch' abbia un' esponente maggiore, p. e. i termini della serie 0. 1. 2. 3, ec. x, il cui esponente è 1, per quei de' quadrati, il cui esponente è 2, o per quei de' cubi, il cui esponente è 3, o per quei delle quarte potenze, ec. s' avranno allora delle nuove serie, le quali avran degli esponenti negativi $1 - 2$, $1 - 3$, $1 - 4$, ec. (*N.* 20.), ovvero -1, -2, -3, -4, ec. e 'l rapporto della somma d' ognuna di dette serie al suo ultimo termine sarà sempre come 1 all' esponente accresciuto dell' unità; perocchè gli esponenti di queste serie coll' esponente o della serie degli eguali formeranno una progressione aritmetica negativa 0, -1, -2, -3, -4, ec. ed in conseguenza i denominatori del loro rapporto dovranno altresì formare una progressione aritmetica negativa, il cui primo sarà 'l denominatore 1 del rapporto degli eguali; ciò che in fatti succede, poichè 'l rapporto della serie, che ha per esponente -1 al suo ultimo termine moltiplicato pel numero de' termini, essendo come 1 all' esponente -1 accresciuto dell' unità, si è $\frac{1}{0}$; quello della serie, che ha per esponente -2, essendo come 1 all' esponente -2 accresciuto dell' unità, è $\frac{1}{-1}$; quello della serie, che ha per esponente -3, essendo come 1 all' esponente -3 accresciuto dell' unità, è $\frac{1}{-2}$, ec. dunque 'l rapporto $\frac{1}{1}$ degli eguali, e i rapporti delle serie negative sono $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{0}$, $\frac{1}{-1}$ $\frac{1}{-2}$, $\frac{1}{-3}$, $\frac{1}{-4}$, ec. ed egli è manifesto, che i loro denominatori formano una progressione aritmetica negativa non diversamente dagli esponenti delle serie.

28. S' avverta, che i termini di qualunque serie, la quale ab-

bia l'esponente negativo, son reciprochi a' termini della serie, il cui esponente positivo è 'l medesimo numero di quello dell' esponente negativo.

Chiaminsi o, a, b, c, d, ec. x i termini della serie o. 1. 2. 3. 4, ec. x; la serie de' quadri sarà dunque o^2, a^2, b^2, c^2, d^2, ec. xx, e la serie negativa, ch' avrà lo stesso esponente 2, sarà o^{-2}, a^{-2}, b^{-2}, c^{-2}, d^{-2}, ec. x^{-2}: ora detta serie può esprimersi in questo modo: $\frac{1}{o^2}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$, $\frac{1}{d^2}$, ec. $\frac{1}{x^2}$, come s'è detto parlando del Calcolo degli Esponenti (*Lib.* 1. *N.* 161.), e la serie o^2, a^2, b^2, c^2, d^2, ec. x^2 può esprimersi in quest'altro: $\frac{o^2}{1}$, $\frac{a^2}{1}$, $\frac{b^2}{1}$, $\frac{c^2}{1}$, $\frac{d^2}{1}$, ec. $\frac{x^2}{1}$. Ma per dimostrare, che i termini di queste due serie son reciprochi, basta prender nella prima i due termini $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, e nella seconda i termini corrispondenti $\frac{a^2}{1}$, $\frac{b^2}{1}$, e quindi far vedere, che si ha questa proporzione, $\frac{1}{a^2} . \frac{1}{b^2} :: \frac{b^2}{1} . \frac{a^2}{1}$; il ch' è facile a comprendersi, poichè facendo 'l prodotto $\frac{a^2}{a^2}$ degli estremi e'l prodotto $\frac{b^2}{b^2}$ de' medj trovasi, che questi due prodotti son uguali, a motivo di $\frac{a^2}{a^2} = 1$, e di $\frac{b^2}{b^2} = 1$. Dal che ne segue, che i termini della serie o^{-2}, a^{-2}, b^{-2}, c^{-2}, d^{-2}, ec. x^{-2}, la quale non differisce dalla serie $\frac{1}{o^2}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$, $\frac{1}{d^2}$, ec. $\frac{1}{x^2}$, van diminuendo, quando quei della serie reciproca o^2, a^2, b^2, c^2, d^2, ec. x^2 vanno aumentando, e ch'in vece d'essere il primo termine o^2 della serie o^2, a^2, b^2, ec. infinitamente picciolo, all'incontro il primo termine $\frac{1}{o^2}$ della serie $\frac{1}{o^2}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, ec. è infinitamente grande; imperocchè, divenendo 'l quoziente (secondo le regole della divisione) tanto più grande, quanto più picciolo è 'l divisore, ne risulta ad evidenza, che quando 'l divisor sarà infinitamente picciolo, o uguale a zero, il quoziente esser dee infinitamente grande; ed in conseguenza $\frac{1}{o^2}$, cioè 1 diviso per zero dee essere infinito.

30. Acciò non si pigli per paradosso quanto io ho asserito circa $\frac{1}{o}$, basta riflettere, che 1 diviso per 1 dà 1 al quoziente; che 1 diviso

viſo per $\frac{1}{2}$ dà 2 al quoziente; che 1 diviſo per $\frac{1}{3}$ dà 3 al quoziente, ec. cioè 1 diviſo per una frazione dà ſempre al quoziente il denominator della frazione, che ſerve di diviſore: ora già ſi ſa, che le frazioni $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ec. van tanto più diminuendo, quanto più i lor denominatori vanno aumentando; dunque, quando la frazione avrà un denominatore infinitamente grande, e ch'in conſeguenza ella ſarà infinitamente picciola, la grandezza 1 diviſa per detta frazione darà un quoziente infinitamente grande: ma una frazione infinitamente picciola è nulla, perchè è minore di quanto aſſegnar mai ſi poſſa di più picciolo; ond'eſſa è uguale a zero, e però 1 diviſo per zero è infinito.

Applicazione de' precedenti Principj alla Geometria.

31. Gli elementi AB, CD, ec. d'un triangolo MNR (*Fig.* 5.) ſono fra ſe come le loro aſſiſſe MA, MC, ec. perocchè i triangoli ſimili MAB, MCD, ec. ci danno AB. CD :: MA. MC: ora l'aſſiſſe MA, MC, ec. ſono fra loro come i numeri 0. 1. 2. 3. 4. 5, ec. x, il cui eſponente è 1; dunque la ſomma degli elementi AB, CD, ec. cioè 'l triangolo MNR è all'ultimo elemento NR, ovvero alla baſe moltiplicata pel numero de' termini, o per l'altezza NM, come 1 è all' eſponente 1 accreſciuto dell'unità, cioè come 1 è a 2; il che noi ſappiamo eſſer vero per mezzo della Geometria.

32. Se divideſi 'l raggio AB d'un circolo (*Fig.* 8.) in infinite parti uguali, e che dal centro A ſi deſcrivano delle circonferenze, che paſſino per i punti di diviſione N, M, ec. tutte queſte circonferenze ſaranno come i lor raggi AN, AM, ec. ovvero come i numeri 0. 1. 2. 3, ec. x, il cui eſponente è 1; la ſomma di dette circonferenze ſarà dunque alla maſſima moltiplicata pel numero de' termini, o pel raggio AB, come 1 all' eſponente 1 accreſciuto dell' unità, o come 1 a 2: ora la ſomma delle circonferenze non differiſce dal circolo BCD; onde il circolo equivale alla ſua circonferenza moltiplicata per la metà del raggio, o ad un triangolo, ch'abbia per baſe una retta uguale alla circonferenza, e per altezza il raggio; il che noi ſappiamo eſſer vero per mezzo della ſemplice Geometria.

33. I piani elementari PQ, RS, ec. d'una piramide (*Fig.* 9.) ſono fra ſe come i quadri delle lor diſtanze AX, AZ, ec. al vertice A (*Lib. II. N.* 540.), cioè come i quadri dell'aſſiſſe, ch'elle

occu-

occupano sull'altezza AB della piramide, ed in conseguenza come i quadrati, il cui esponente è 2, de' numeri 0. 1. 2. 3, ec. x; la somma dunque de' piani elementari, ovvero la piramide è al maggiore, o alla base moltiplicata pel numero de' termini, o sia per l'altezza AB, come 1 all'esponente 2 accresciuto dell'unità, cioè come 1 a 3: così la piramide è'l terzo d'un prisma d'ugual base ed altezza; e ciò è vero per la Geometria ordinaria.

34. Se facciamo ravvolgere un quarto di circolo ABC (*Fig.* 10.) intorno al suo raggio fisso ed immobile AC, gli elementi perpendicolari ad AC descriveranno de' circoli, i quali saran fra se come i quadri degli elementi, cioè de' loro raggi, e per conseguenza come i rettangoli delle parti del diametro segate dagli elementi; e la somma di essi circoli sarà una semisfera: ora le parti AE, AF, AG, ec. segate dagli elementi dal lato di A, sono fra loro come la serie infinita 0. 1. 2. 3. 4, ec. e le parti rimanenti EP, FP, ec. equivagliono al diametro AP, meno le parti AE, AF, ec. onde chiamando 0, a, b, c, d, ec. x le parti AE, AF, AG, ec. fino all'ultima AC, ch'è'l raggio, e ch'appelliamo x, il diametro sarà in conseguenza $2x$, e le parti EP, FP, GP, ec. saranno $2x - 0$, $2x - a$, $2x - b$, $2x - c$, $2x - d$, ec. $2x - x$: così, moltiplicando i termini di questa per quei della serie 0, a, b, c, d, ec. x, i prodotti $2x \times 0 - 00$, $2xa - aa$, $2xb - bb$, $2xc - cc$, $2xd - dd$, ec. $2xx - xx$ saran la serie de' rettangoli corrispondenti a' quadri degli elementi. Ora questa serie è composta di due altre, l'una positiva, e l'altra negativa: la positiva è $2x \times 0$, $2xa$, $2xb$, $2xc$, $2xd$, ec. $2xx$; e siccome in questa serie le grandezze 0, a, b, c, d, ec. x, trovandosi moltiplicate per la stessa quantità $2x$, sono fra loro come se non fossero moltiplicate, così ne segue, esser la somma di detta serie al suo ultimo termine $2xx$ moltiplicato pel numero de' termini x, come 1 all'esponente 1 della serie 0, a, b, c, ec. accresciuto dell'unità, o come 1 a 2, cioè detta serie è uguale ad x^3: la negativa poi è -0, $-aa$, $-bb$, $-cc$, $-dd$, ec. $-xx$, ed essendo i termini di questa come i quadrati de' numeri 0. 1. 2. 3, ec. la lor somma è uguale al terzo dell'ultimo termine $-xx$ moltiplicato pel numero de' termini x; però la somma della serie de' rettangoli equivale al prodotto del suo ultimo termine $2xx - xx$, cioè xx moltiplicato pel numero de' termini, meno'l terzo di esso prodotto: ma i circoli descritti dagli elementi del quarto di circolo son nella stessa ragione de' rettangoli; dunque la lor

lor ſomma, cioè la ſemisfera è uguale al prodotto del maſſimo circolo BCN moltiplicato pel numero de' termini, o pel raggio AC, meno 'l terzo di eſſo prodotto, e per conſeguenza ella ne vale i due terzi: donde facilmente ſi conchiude, che la ſemisfera equivale ai due terzi d'un cilindro BNMD, ch'abbia per baſe il maſſimo circolo BCN e per altezza il raggio, e che l'intera sfera equivale a' due terzi del cilindro circonſcritto, ch'abbia per baſe il circolo BCN e per altezza il diametro AP; il che noi ſappiamo eſſer vero per mezzo della Geometria ordinaria.

35. I quadri degli elementi del quarto di circolo ABC eſſendo fra loro come la ſerie de' rettangoli corriſpondenti $2x \times 0 - 00$, $2xa - aa$, $2xb - bb$, $2xc - cc$, $2xd - dd$, ec. $2xx - xx$; gli elementi ſaranno fra ſe come la ſerie $\sqrt{2x \times 0 - 00}$, $\sqrt{2xa - aa}$, $\sqrt{2xb - bb}$, $\sqrt{2xc - cc}$, $\sqrt{2xd - dd}$, ec. $\sqrt{2xx - xx}$. Però, ſe ſi poteſſe trovar' il rapporto di queſta ſerie al ſuo ultimo termine moltiplicato pel numero de' termini (il che non è ſtato fino ad ora poſſibile), avrebbeſi la quadratura del circolo.

36. Se facciamo ravvolgere una ſemieliſſe ACB (*Fig.* 11.) intorno al ſuo aſſe maggiore AB, l'eliſſoide, che ne ſarà formata, equivarrà al circolo, cui deſcrive il picciolo diametro OC moltiplicato per i due terzi del grand'aſſe AB; perocchè gli elementi dell'eliſſe ordinati al grand'aſſe AB ſono fra ſe come gli elementi del ſemicircolo circonſcritto AEB: così i loro quadrati, o i circoli, ch'eſſi deſcriveranno intorno al grand'aſſe, ſaran fra loro come i quadri, o i circoli, che deſcriveranno l'ordinate del ſemicircolo: ora la ſomma de' circoli deſcritti dagli elementi del ſemicircolo, cioè la sfera equivale al ſuo maſſimo circolo moltiplicato per i due terzi del diametro AB; dunque l'eliſſoide, ovvero la ſomma de' circoli deſcritti dagli elementi dell' eliſſe ſarà uguale al ſuo maſſimo circolo, cioè al circolo deſcritto da OC moltiplicato per $\frac{2}{3}$ AB.

37. Ognun può facilmente vedere, che ſe ſi fa ravvolgere una ſemieliſſe DAC intorno al ſuo aſſe minor DC, la sferoide, che ne ſarà formata, equivarrà al circolo, cui deſcrive il ſemiaſſe maggiore AO moltiplicato per i due terzi dell' aſſe minor CD; perocchè gli elementi di queſta ſemieliſſe ordinati al picciolo aſſe ſono fra loro come gli elementi del ſemicircolo iſcritto DHC.

38. Nella parabola ordinaria MNR (*Fig.* 7.), i quadri degli elementi AB, CD ſono fra loro come le aſſiſſe MA, MC, ec.

ov-

ovvero come i numeri 0. 1. 2. 3. 4. 5, ec. x; onde gli elementi sono fra se come le radici quadre di detti numeri, i quali hanno per esponente $\frac{1}{2}$; ed in conseguenza la lor somma è all' ultimo, o massimo NR moltiplicato pel numero de' termini, o sia per NM, come 1 all' esponente $\frac{1}{2}$ accresciuto dell' unità, cioè come 1 a $\frac{3}{2}$, o pure come $\frac{2}{2}$ a $\frac{3}{2}$, o come 2 a 3: così la parabola è i due terzi del rettangolo circonscritto.

* 39. Se facciamo ravvolgere una semiparabola MNR (*Fig.* 13.) intorno al suo asse fisso ed immobile MR, i suoi elementi AB, CD perpendicolari all' asse descriveranno de' circoli, la cui somma sarà una paraboloide; e detti circoli saran fra loro come i quadri degli elementi, che sono i lor raggi: ora i quadrati degli elementi sono fra se come le loro assisse, o come i numeri 0. 1. 2. 3. 4, ec x; onde la somma de' quadrati degli elementi, o quella de' loro circoli è all' ultimo e massimo NS moltiplicato pel numero de' termini, o per l' altezza MR, come 1 a 2, cioè la paraboloide è la metà del cilindro circonscritto.

40. Se facciamo ravvolgere una semiparabola MNR (*Fig.* 14.) intorno alla base HN del suo compimento MHN, troveremo il solido descritto in questo modo: Cerco prima il solido descritto dal suo compimento, cioè la somma de' circoli descritti dai suoi elementi BE, DF, ec. perpendicolari ad HN: ma siccome egli m' è ignoto il rapporto di questi elementi fra loro, perocchè in questo compimento io non conosco che 'l rapporto degli elementi perpendicolari ad MH, così osservo, che gli elementi BE, DF, ec. altro non sono se non se gli elementi AE, CF, ec. del rettangolo circonscritto, meno gli elementi AB, CD, ec. della parabola, i quali sono fra se come le radici delle loro assisse MA, MC, ec. ovvero de' numeri 0. 1. 2. 3, ec. Quindi chiamando e ciascun' elemento AE, ec. del rettangolo, ed r ciascun' elemento AB, ec. della parabola, cadaun' elemento BE, ec. del compimento sarà $e - r$: ora i circoli, cui gli elementi $e - r$ descriveranno intorno ad HN, saran come i quadri di detti elementi, che sono i lor raggi; onde facendo 'l quadro di $e - r$, ch' è $ee - 2er + rr$, i quadri degli elementi BE, DF, ec. formeranno la serie degli $ee - 2er + rr$, ed in conseguenza ella conterrà la serie ee de' quadrati degli eguali, ovvero de' quadri degli elementi AE, CF, ec. del rettangolo circonscritto RH, meno $2er$, cioè meno due serie delle radici quadrate, ovvero degli elementi AB, CD, ec. della parabola moltiplicati ciascuno per e, più la serie de' quadri

rr

rr di queste radici: ma la serie degli *ee* equivale al suo ultimo termine, cioè al quadro di RN, od MH moltiplicato pel numero de'termini, o per l'altezza HN; poichè tutti gli *er*, essendo moltiplicati per la medesima quantità *e*, sono fra essi come se non fossero moltiplicati; e per conseguenza la lor somma è al loro ultimo termine, o pure al quadro di RN, od MH moltiplicato pel numero de'termini HN, come 1 all'esponente $\frac{1}{2}$ accresciuto dell' unità, o come 2 a 3; però i 2*er*, cioè i doppj degli *er* sono i $\frac{4}{3}$ del loro ultimo termine moltiplicato per HN: finalmente gli *rr*, essendo i quadri delle radici, sono come i numeri 0 . 1 . 2 . 3, ec. e la lor somma è la metà del prodotto del loro ultimo termine, ovvero del quadro di RN, od HM moltiplicato pel numero de' termini, o sia per l'altezza HN; onde la serie de' quadri degli elementi è uguale al prodotto $\overline{HM}^2 \times HN$, meno i $\frac{4}{3}$ di esso prodotto, più la metà, cioè ella equivale a $\frac{3}{2} - \frac{4}{3} = \frac{9}{6} - \frac{8}{6} = \frac{1}{6}$ del prodotto del suo ultimo termine moltiplicato pel numero de'termini: ma i circoli descritti dagli elementi BE, DF, ec. del compimento sono fra se come i quadri di questi elementi; dunque la somma de' circoli, o'l solido descritto dal compimento è'l sesto del prodotto del suo massimo circolo MT moltiplicato per l' altezza HN, cioè'l sesto del cilindro circonscritto RT.

Quindi ne segue, che'l solido descritto dalla rivoluzione della parabola MNR intorno ad HN esser dee i $\frac{5}{6}$ del cilindro RT.

41. NOTA. Che quando si ha una serie composta di molte altre, debbono gli ultimi termini di ciascuna serie esser fra loro uguali, per poterne dedurre la somma totale siccome abbiam fatto nel precedente Esempio: ma caso che ciò non sia, diremo in altro luogo a che si debba appigliarsi.

42. Se facciamo ravvolgere una semiparabola MNR (*Fig.* 15.) intorno ad una retta MH tangente al suo vertice M, troveremo'l solido descritto in questo modo. Gli elementi AB, CD, ec. del compimento MHN perpendicolari ad MH sono fra se come i quadri delle loro assisse MA, MC, ovvero de' numeri 0 . 1 . 2 . 3 . 4, ec. perciò i quadri di questi elementi sono fra lor come le quarte potenze di detti numeri, ed in conseguenza essi sono al loro ultimo termine, cioè al quadro di HN moltiplicato pel numero de' termini, o per l'altezza MH, come 1 all' esponente 4 accresciuto dell'unità, o come 1 a 5: ma i circoli, cui gli elementi descrivono girando intorno ad MH, sono fra se come i quadri

degli elementi ; dunque la lor ſomma è l' $\frac{1}{5}$ del prodotto del maſſimo NT moltiplicato per MH, cioè 'l quinto del cilindro circonſcritto RT; però il ſolido prodotto dalla rivoluzione della ſemiparabola MNR eſſer dee i $\frac{4}{5}$ di detto cilindro.

43. Se facciamo ravvolgere una ſemiparabola MNR (*Fig. 16.*) intorno alla ſua baſe RN, troveremo 'l ſolido deſcritto in queſto modo: gli elementi AB, CD, ec. perpendicolari alla baſe RN ſon' uguali agli elementi AE, CF del rettangolo circonſcritto RH, meno gli elementi BE, DF, ec. del compimento, che ſono fra loro come i quadri de' numeri 0. 1. 2. 3. 4, ec. Onde chiamando e ciaſcun' elemento AE, ec. del rettangolo, e q ciaſcun' elemento BE del compimento, gli elementi AB, ec. ſaranno gli $e - q$, ed i loro quadri gli $ee - 2eq + qq$: così la ſerie de' loro quadrati conterrà la ſerie degli ee, ovvero de' quadri uguali degli elementi del rettangolo, meno $2eq$, cioè meno due volte la ſerie de' quadri, o degli elementi del compimento moltiplicati ciaſcuno per e, più la ſerie dei qq, ovvero delle quarte potenze de' numeri 0. 1. 2. 3, ec. x: ora la ſerie degli ee equivale al ſuo ultimo termine, o al quadro di MR moltiplicato pel numero de' termini NR, poichè gli eq eſſendo la ſerie de' quadri moltiplicati ciaſcuno per una ſteſſa grandezza e, ſono fra loro come ſe non foſſero moltiplicati, ed in conſeguenza, a motivo del loro eſponente 2, la lor ſomma è 'l terzo del prodotto del loro ultimo termine eq, ovvero del quadro di HN, od MR moltiplicato pel numero de' termini RN; donde ne ſegue, che la ſomma dei $2eq$ è i due terzi dello ſteſſo prodotto: in fine la ſomma dei qq, il cui eſponente è 4, è 'l quinto del prodotto del ſuo ultimo termine qq, cioè del quadro $\overline{HN}^2$, od $\overline{RM}^2$ moltiplicato pel numero de' termini RN; dunque la ſomma dei quadri degli elementi AB, CD, ec. della parabola equivale al prodotto $\overline{RM}^2 \times RN$ del quadro del loro ultimo termine moltiplicato pel numero de' termini, meno i $\frac{2}{3}$ di detto prodotto, più 'l $\frac{1}{5}$, cioè è uguale a $\frac{6}{5} - \frac{2}{3} = \frac{18}{15} - \frac{10}{15} = \frac{8}{15}$ del prodotto; però la ſomma de' circoli deſcritti da queſti elementi è altresì al maſſimo MS moltiplicato pel numero de' termini RN, come 8 a 15, e conſeguentemente eſſa è gli otto quinti del cilindro circonſcritto MT.

44. AVVERTIMENTO. Vi ſono delle parabole di tutt' i gradi al di ſopra dell' ordinaria, che quadrata s' appella perchè i quadri

dri delle fue ordinate fono fra fe come le loro affiffe ; e in ciafcun grado, fuorchè nel fecondo, ch'è quello della parabola ordinaria, evvi più d'una parabola: p. e. chiamando y ciafcun' ordinata, x ciafcun' affiffa, ed a il parametro, la prima parabola del terzo grado è $y^3 = aax$, cioè i cubi dell'ordinate fon'uguali all'affiffe moltiplicate per lo quadro del parametro; ed in confeguenza i cubi dell'ordinate fono come l'affiffe: la feconda parabola dello fteffo grado è $y^3 = axx$, cioè i cubi dell'ordinate fono fra loro come i quadri dell'affiffe; e'n quefto grado non vi fono che dette due parabole, non potendofi che in quefti due modi combinar le lettere a, x. La prima parabola del quarto grado è $y^4 = a^3x$, ovvero le quarte potenze dell'ordinate fono fra fe come le loro affiffe: la feconda è $x^4 = ax^3$, e fe bene paja, che ritrovar fe ne poffa una terza $y^4 = aaxx$, tuttavolta ella è del fecondo grado; poichè $yy = ax$ effendo quella del fecondo grado, è evidente, che facendo 'l quadro de' due membri s' avrà $y^4 = aaxx$. La prima parabola del qninto grado è $y^5 = a^4x$; la feconda è $y^5 = a^3xx$; la terza è $y^5 = aax^3$, e finalmente la quarta è $y^5 = ax^4$. Nel fefto grado trovafi $y^6 = a^5x$, $y^6 = ax^5$: ma $y^6 = a^4xx$ non è di quefto grado, poichè dall'una e dall'altra parte eftraendo la radice quadra, fi ha $y^3 = a^2x$; dal che comprendefi, che quefta parabola è del terzo grado. Così pure $y^6 = a^3x^3$, ed $y^6 = a^2x^4$ non fono del fefto grado; perocchè coll'eftrazione della radice cuba e'riducefi la prima ad $y^2 = ax$, ch'è la parabola quadrata, e coll' eftrazione della quadra fi riduce la feconda ad $y^3 = axx$, ch'è la feconda parabola del terzo grado: noi troveremo nello fteffo modo le parabole del fettimo grado, ec. offervando, che in tutt'i gradi le prime parabole fon quelle, in cui l' affiffa x è al primo grado: Ciò pofto.

45. Egli è facile a trovar' il rapporto di tutte le parabole al rettangolo circonfcritto di qualunque grado elle fieno: p. e. nella prima parabola cuba, o del terzo grado $y^3 = aax$ fra loro effendo i cubi AB, CD, ec. (*Fig.* 17.) come le lor' affiffe, l' ordinate, o gli elementi fono in confeguenza come le radici cube dell' affiffe MA, MC, ec. ovvero come le radici de' numeri 0. 1. 2. 3. 4, ec. x, le quali han per efponente $\frac{1}{3}$; dunque la fomma degli elementi è all'ultimo, o maffimo RN moltiplicato pel numero de' termini MR, come 1 all' efponente $\frac{1}{3}$, più 1, ovvero come 1 a $\frac{4}{3}$, o come $\frac{3}{3}$ a $\frac{4}{3}$, cioè come 3 a 4, e però la parabola è li $\frac{3}{4}$ del rettangolo circonfcritto. Similmente nella prima parabo-

 la

la $y^4 = a^3x$ del quarto grado fra loro essendo le quarte potenze dell'ordinate, o degli elementi come le assisse, o come i numeri o. 1. 2. 3. 4, ec. x, gli elementi sono come le quarte radici di questi numeri, i quali han per esponente $\frac{1}{4}$; onde la lor somma è al rettangolo circonscritto, come 1 all'esponente $\frac{1}{4}$ più uno, o come 1 a $\frac{5}{4}$, o come $\frac{4}{4}$ a $\frac{5}{4}$, o come 4 a 5; ed in conseguenza questa parabola è li $\frac{4}{5}$ del rettangolo circonscritto: lo stesso dicasi dell'altre prime parabole di tutt'i gradi.

Nella seconda parabola cuba $y^3 = axx$ i cubi dell' ordinate, o degli elementi essendo fra loro come i quadrati dell'assisse, o come i quadri de'numeri o. 1. 2. 3. 4, ec. x, il cui esponente è 2, gli elementi sono in conseguenza come le radici cube di detti quadri, e queste radici han per esponente $\frac{2}{3}$; poichè già sappiamo, che per estrarre la radice d'una potenza conviene divider l'esponente di detta potenza per quello della radice, che si vuol estrarre (*N.* 20.); la somma degli elementi è dunque all'ultimo termine moltiplicato pel numero de'termini, o al rettangolo circonscritto, come 1 è all'esponente $\frac{2}{3}$, più 1, ovvero come 1 a $\frac{5}{3}$, o come $\frac{3}{3}$ a $\frac{5}{3}$, o finalmente come 3 a 5. Così pure, nella seconda parabola del quarto grado $y^4 = ax^3$ le quarte potenze dell' ordinate essendo fra loro come i cubi dell'assisse, o pure de' numeri o. 1. 2. 3, ec. x, i quali cubi hanno 3 per esponente, gli elementi sono come le quarte radici di detti cubi, ed in conseguenza il loro esponente è $\frac{3}{4}$; onde la lor somma è al rettangolo circonscritto, come 1 è alla frazione $\frac{3}{4}$ accresciuta dell' unità, o come 1 a $\frac{7}{4}$, ovvero in fine come $\frac{4}{4}$ a $\frac{7}{4}$, cioè come 4 a 7; e così dell' altre.

46. Se sopra l' asse MR d' una semiparabola ordinaria MNR (*Fig.* 18.) alzasi perpendicolarmente un triangolo rettangolo MRT, e che si moltiplichino gli elementi AR, CD, ec. della parabola per gli elementi corrispondenti AE, CF, ec. del triangolo, i rettangoli formati da questi prodotti comporranno un solido TPNRM, la cui solidità noi troveremo in questo modo. Gli elementi AB, CD, ec. della parabola sono fra se come le radici quadre delle loro assisse, o pure de' numeri o. 1. 2. 3, ec. x, le quali radici han per esponente $\frac{1}{2}$, e gli elementi AE, CF, ec. del triangolo sono fra essi come le lor'assisse, o come i numeri o. 1. 2. 3, ec. x, il cui esponente è 1; dunque i prodotti de'termini di queste due serie, cioè i rettangoli fatti dagli elementi della parabola moltiplicati per quei del triangolo avranno

per

per esponente $\frac{1}{2} + 1$, o sia $\frac{3}{2}$ (*N.* 20.), e conseguentemente questi rettangoli saranno al loro ultimo termine, ovvero alla base TPNR moltiplicata pel numero de' termini, o sia per l' altezza MR, come 1 è all' esponente $\frac{3}{2}$, più uno, o come 1 a $\frac{5}{2}$, o alla fine come $\frac{2}{2}$ a $\frac{5}{2}$, cioè come 2 a 5: così 'l solido TPRNM sarà i due quinti del parallelepipedo circonscritto, vale a dire d' ugual base, ed altezza.

47. Ad imitazione del solido precedente noi potremmo con egual' agevolezza formarne infiniti altri, e quindi trovar la loro solidità: si potrebbero p. e. moltiplicare gli elementi d' un triangolo per quei d' un compimento di parabola, ovvero gli elementi d' una parabola per quei del suo compimento, o in fine gli elementi d' una parabola d' un certo grado per quei d' una parabola d' un' altro, ec.

48. Se agli elementi BA, DC, ec. d' una semiparabola quadra MNR (*Fig.* 19.) s' aggiungono gli elementi AE, CF, ec. d' un rettangolo MRTP, e che si faccia girare la lor somma intorno al lato fisso ed immobile PT del rettangolo, il solido prodotto dalla rivoluzione della figura NMPT si conoscerà in questo modo. Essendo gli elementi della figura NMPT composti degli elementi del rettangolo, che son tutti fra loro uguali, e di que' della semiparabola, i quali tutti sono fra se come le radici delle lor' assisse, o de' numeri 0. 1. 2. 3, ec. x, se chiamiamo e ciascun' elemento del rettangolo, ed r ciascun' elemento della semiparabola, gli elementi della figura NMPT saranno gli $e + r$, ed i loro quadrati saran la serie degli $ee + 2er + rr$: ora questa serie contiene 1°. la serie degli ee, ovvero de' quadri degli elementi del rettangolo. 2°. la serie $2er$, cioè due volte la serie degli elementi della semiparabola moltiplicati ciascuno per e. 3°. la serie degli rr, ovvero de' quadrati degli elementi della semiparabola: ma la serie degli ee equivale al suo ultimo termine, o al quadro di RT moltiplicato pel numero de' termini, o sia per l' altezza PT; poichè gli er essendo gli r moltiplicati per la stessa quantità e, sono fra loro come gli r, ed in conseguenza la lor somma è all' ultimo termine er, cioè al rettangolo RT × NR moltiplicato pel numero de' termini, ovvero per PT, come 1 all' esponente $\frac{1}{2}$ degli r accresciuto dell' unità, cioè come 1 a $\frac{3}{2}$, o come 2 a 3; donde ne risulta, che i $2er$ sono li $\frac{4}{3}$ di RT × NR moltiplicato per PT. Finalmente gli rr essendo i quadri delle radici quadrate, o degli elementi della semiparabola, sono come i numeri 0. 1.

2. 3,

2. 3, ec. x, e la lor somma è la metà del loro ultimo termine, o sia del quadro di NR moltiplicato pel numero de' termini PT. Ora, siccome disuguali sono gli ultimi termini di queste tre serie ee, $2er$, rr, per essere RT maggiore, o minor di NR, non possiamo fare un' aggregato totale delle loro somme; però ci basterà sapere, che la somma de' quadri degli elementi BE, DF, ec. della figura NMPT è $\overline{RT}^2 \times PT + \frac{4}{3} RT \times RN \times PT + \frac{1}{2} \overline{NR}^2 \times PT$: ma il quadro dell'ultimo termine di questa somma, cioè'l quadrato di NT, o pure di $RT + NR$ è $\overline{RT}^2 + 2RT \times RN + \overline{NR}^2$; onde questo quadro moltiplicato pel numero de' termini PT è $\overline{RT}^2 \times PT + 2RT \times RN \times PT + \overline{NR}^2 \times PT$, e conseguentemente la somma de' quadri degli elementi della figura NMPT è al suo ultimo termine moltiplicato pel numero de' termini, come $\overline{RT}^2 \times PT + \frac{4}{3} RT \times RN \times PT + \frac{1}{2} \overline{NR}^2 \times PT$ è ad $\overline{RT}^2 \times PT + 2RT \times RN \times PT + \overline{NR}^2 \times PT$, ovvero come $\overline{RT}^2 + \frac{4}{3} RT \times RN + \frac{1}{2} \overline{NR}^2$ ad $\overline{RT}^2 + 2RT \times RN + \overline{NR}^2$, a motivo del comun moltiplicatore PT, cioè la somma è all'ultimo termine moltiplicato pel numero de' termini, come il quadro di RT, più i $\frac{4}{3}$ del rettangolo di $RT \times NR$, più la metà del quadro di NR è al quadrato di RT, più due volte il rettangolo di $RT \times NR$, piu'l quadro di NR; e questo rapporto può agevolmente conoscersi, date che sieno le linee RT, NR: ora i circoli descritti dagli elementi BE, DF, ec. nel ravvolgersi intorno a PT sono come i quadrati di questi elementi; dunque la lor somma, o'l solido descritto dalla rivoluzione della figura NMPT intorno a PT è all'ultimo termine, o al circolo NH moltiplicato pel numero de' termini PT, come $\overline{RT}^2 + \frac{4}{3} RT \times RN + \frac{1}{2} \overline{NR}^2$ ad $\overline{RT}^2 + 2RT \times RN + \overline{NR}^2$.

Ad imitazione di questo solido noi potremmo con egual facilità formarne infiniti altri, e quindi trovar' il loro valore: si potrebbero p. e. agli elementi del rettangolo RMPT aggiugnere gli elementi d'un compimento di parabola quadrata, o quei d'una parabola di qualsivoglia grado, o in fine quei d'un compimento di qualsivoglia parabola, ec.

In oltre, se dal solido descritto dalla rivoluzione della figura NMPT

NMPT intorno a PT noi leviamo il cilindro descritto dal rettangolo MRTP, avremo 'l solido, o l'anello aperto descritto dalla semiparabola NMR intorno a PT; e con tal mezzo si conosceranno infiniti anelli aperti, che si potrebbero formare, ponendo in vece della parabola NMR qualche altra parabola d'un grado più elevato, o qualche compimento, ec.

49. NOTA. Che in tutte le parabole il rapporto degli elementi del compimento paralleli all'asse si conosce mediante la stessa equazione della parabola: sia p. e. la prima parabola cuba MNR (*Fig.*19.), di cui MHN è 'l compimento, ed $y^3 = aax$ l'equazione, la qual denota, che i cubi dell'ordinate sono fra se come le loro assisse. Nel suo compimento io conduco gli elementi AB, CD, ec. paralleli all'asse, e da' punti B, D, ec. l'ordinate BE, DF, ec. così gli elementi AB, CD, ec. son' uguali all'assisse ME, MF, ec. dell'asse, e l'assisse MA, MC, ec. equivagliono all'ordinate BE, DE, ec. all'asse; dunque gli elementi AB, CD, ec. del compimento sono come i cubi delle loro assisse MA, MC, ec. il che io conosco mediante l'equazione $y^3 = aax$; perocchè x, rappresentando l'assisse, rappresenta in conseguenza gli elementi del compimento, ed y^3, rappresentando i cubi dell'ordinate all'asse, rappresenta pure i cubi dell'assisse MA, MC, ec. Per la stessa ragione si troverà, che nella seconda parabola cuba $y^3 = axx$ i quadri degli elementi del compimento sono come i cubi delle lor'assisse, e così in altri casi.

50. Se facciamo ravvolgere una semiperbola MNR (*Fig.* 20.) intorno al suo primo asse prolungato PR, troveremo 'l solido descritto in questo modo: I quadri degli elementi AB, CD, ec. sono fra loro come i rettangoli MB × BP, MD × DP, ec. dell'assisse MB, MD, ec. per le rette PB, PD, ec. le quali altro non sono che l'asse PM accresciuto dell'assisse MB, MD; onde chiamando a l'asse, ed x ciascun'assissa, qualunque retta PB, PD, ec. sarà $a + x$, ed ogni rettangolo sarà $ax + xx$: così la serie de' rettangoli sarà la serie degli $ax + xx$, che contiene la serie degli ax, e quella degli xx. Ora gli ax, essendo l'assisse x moltiplicate per la stessa grandezza a, sono fra se come gli x, cioè come i numeri 0. 1. 2. 3. 4, ec. x; dunque la lor somma sarà la metà del loro ultimo termine MR × PM moltiplicato pel numero de' termini, ovvero per MR, cioè $\frac{1}{2}\overline{MR}^2 \times PM$: e gli xx essendo i quadri dell'assisse, sono il terzo del loro ultimo termine $\overline{MR}^2$

mol-

moltiplicato pel numero de' termini, ovvero per MR, cioè $\frac{1}{3}\overline{MR}^3$; però la somma de' rettangoli è $\frac{1}{2}\overline{MR}^2 \times PM + \frac{1}{3}\overline{MR}^3$: ma l' ultimo, o massimo rettangolo è $MR \times PR$, od $MR \times PM + MR \times MR$, a motivo di $PR = PM + MR$, e questo rettangolo moltiplicato pel numero de' termini MR è $\overline{MR}^2 \times PM + \overline{MR}^3$; dunque la somma de' rettangoli è al suo ultimo termine moltiplicato pel numero de' termini, come $\frac{1}{2}\overline{MR}^2 \times PM + \frac{1}{3}\overline{MR}^3$ ad $\overline{MR}^2 \times PM + \overline{MR}^3$; e'l tutto dividendo per $\overline{MR}^2$, la somma è all'ultimo termine moltiplicato pel numero de' termini, come $\frac{1}{2} PM + \frac{1}{3} MR$ a $PM + MR$, cioè come la metà del primo asse PM, più 'l terzo della assissa maggiore MR è alla somma $PM + MR$ del primo asse e della maggior' assissa: ora i circoli descritti dall' ordinate intorno ad MR sono fra loro come i quadri dell' ordinate; onde la lor somma, o sia l' iperboloide è all' ultimo circolo NH moltiplicato per MR, cioè al cilindro circonscritto, come $\frac{1}{2} PM + \frac{1}{3} MR$ a $PM + MR$.

51. *Sia un' angolo* MAX (Fig. 21.) *di* 45 *gradi co' lati* AM, AX *indefiniti : se in quest' angolo si concepiscono infiniti elementi* CG, FH, ec. *perpendicolari al lato* AX, *e che dopo prese delle terze proporzionali a ciascun' elemento* CG, FH, ec. *e ad una stessa grandezza costante* AB, *si pongano queste terze proporzionali perpendicolarmente ad* AX *da* G *in* u, *da* H *in* i, ec. *e che quindi si faccia passare una curva per le loro estremità* u, i, E, ec. *dico; che questa curva non toccherà le due rette* Ad, AX *se non se all' infinito, e che gli spazj compresi da ambe le parti fra la curva e le rette* Ad, AX *sono infiniti, e fra loro uguali.*

Primieramente la retta A*d* essendo terza proporzionale all'elemento dell' angolo MAX (il qual' elemento è uguale a zero), al punto A, e alla retta AB, esser dee infinita in lunghezza; e però la curva, che dee passare per la sua estremità, non può incontrarla se non all' infinito.

In secondo luogo, poichè gli elementi CG, FH, ec. dell' angolo MAB van sempre crescendo, se ne troverà un *b*B uguale ad AB; dopo di che, quei che succedono, come *r*R, M*m*, ec. divengono tanto maggiori di *b*B, quanto più da esso si discostano; perciò le terze proporzionali a questi elementi e ad AB van sempre diminuendo, quantunque la terza proporzionale vi debba esser

sempre

ſempre, ovvero la terza proporzionale non poſſa diventar'uguale a zero, ſe non quando l' elemento dell' angolo MAX diverrà infinitamente grande per riſpetto ad AB: la ſua affiſſa preſa ſulla linea AX ſarà altresì infinita; poichè gli elementi CG, FH, ec. dell'angolo MAX ſon'uguali ciaſcuno a ciaſcuno alle loro affiſſe AG, AH, ec. per eſſere gli ſteſſi perpendicolari ad AX, e per eſſere l'angolo MAX di 45 gradi; dunque la curva non incontrerà la retta AX ſe non ſe all'infinito, e così le due rette A*d*, AX ſono aſſintoti della curva.

In terzo luogo, a motivo di CG. AB : : AB. G*u*, noi abbiamo $CG \times Gu = \overline{AB}^2$. Similmente, a cagione di FH. AB::AB. H*i*, abbiamo $FH \times Hi = \overline{AB}^2$; dunque $CG \times Gu = FH \times Hi$, e però G*u*. H*i* : : FH. CG: ma i triangoli ſimili FHA, CGA ci danno FH. CG : : AH. AG; onde G*u*. H*i* : : AH. AG, cioè gli elementi G*u*, H*i*, ec. perpendicolari all'aſſintoto AX ſono fra ſe ſcambievolmente come le loro affiſſe: ora l'affiſſe AG, AH, ec. ſon come i numeri naturali 0. 1. 2. 3. ec. il cui eſponente è 1; dunque l'eſponente della ſerie dell'ordinate G*u*, H*i*, ec. all'aſſintoto AX è — 1 (*N.* 28.). Così la ſomma degli elementi compreſi nello ſpazio BA*due* è al ſuo ultimo termine BE moltiplicato pel numero de' termini BA, cioè al quadro ABED, come 1 a — 1 + 1, ovvero come 1 a zero: ma il rapporto di 1 a zero è infinito; onde lo ſpazio BA*due* riſpetto al quadro ABED è infinito.

NOTA. Ch'io dico *il quadro* ABED, perocchè l' elemento *b*B dell'angolo MAX tirato dall'eſtremità B della retta AB eſſendo uguale ad AB, la terza proporzionale BE all' elemento *b*B alla retta AB è uguale ad AB.

Parimente, ſe conduco dell'ordinate T*s*, P*x*, ec. all'aſſintoto A*d*, e che dalle loro eſtremità *s*, *x* io tiri l' ordinate *s*S, *xm*, ec. all' aſſintoto AX, avrò per le parallele AT = S*s*, AP = *mx*, ec. e T*s* = AS, P*x* = A*m*, ec. ora noi abbiam ritrovato, che l'ordinate S*s*, *mx*, ec. ſono reciproche alle loro affiſſe; dunque l'ordinate T*s*, P*x*, ec. all'aſſintoto A*d* ſon reciproche alle lor' affiſſe AT, AP, ec. ma queſt'affiſſe ſono fra ſe come i numeri 0. 1. 2. 3, ec. il cui eſponente è 1; onde la ſerie dell'ordinate T*s*, P*x*, ec. dello ſpazio indefinito ADESX ha per eſponente — 1, ed in conſeguenza queſta ſerie è al ſuo ultimo termi-

ne DE moltiplicato pel numero de' termini AD, cioè al quadro ADEB, come 1 a — 1 + 1, o come 1 a 0: così lo spazio indefinito è infinitamente grande rapporto al quadro ABED.

Dunque gli spazj indefiniti BA*due*, ADE*s*X, avendo lo stesso rapporto infinito al quadro ABED, sono fra loro perfettamente uguali.

52. *La curva da noi descritta è un' iperbola ordinaria equilatera, cioè un' iperbola, i cui due assi son' uguali, e la cui potenza è'l quadrato* ABED.

Imperocchè, da qualsivoglia punto *i* tirando l'ordinate *i*H, *i*N ai due assintoti, avremo *i*H. BE : : AB. AH, siccome s' è veduto poc' anzi; dunque $iH \times AH = \overline{BE}^2$: ma per le parallele noi abbiamo $iN = AH$, ed $Hi = AN$; onde $iN \times AN = \overline{BE}^2$; il ch'è la proprietà dell' iperbola fra i suoi assintoti.

NOTA. Ch' io ho detto esser quest' iperbola equilatera, perchè l'angolo degli assintoti è retto: in fatti, se descrivesi un'iperbola con due assi uguali, si troverà sempre, che i suoi assintoti formeranno un' angolo retto: il che non accade, quando i due assi son disuguali.

NOTA. *Se facciamo ravvolgere lo spazio iperbolico infinito* BAduE *intorno all' assintoto immobile* Ad, *il solido infinitamente lungo* pqtxzh, *prodotto da questa rivoluzione, è non ostante d' una grandezza finita ed uguale ad un parallelepipedo, ch' abbia per base il quadrato* ABED, *e per altezza una linea uguale alla circonferenza descritta dal raggio* AB.

Imperocchè, per la proprietà dell' iperbola, $Gu \times AG = Hi \times AH = BE \times AB$, cioè i prodotti dell' ordinate *Gu*, H*i*, ec. per le loro assisse AG, AH, ec. son tutti uguali fra se e al quadro di AB: ora l' assisse AG, AH, ec. AB sono fra loro come le circonferenze, ch'elle descriveranno intorno all' assintoto A*d*; dunque l'ordinate G*u*, H*i*, ec. BE moltiplicate per le circonferenze, che descritte sarebbero dalle loro assisse AG, AH, ec. AB, ci danno dei prodotti uguali, cioè G*u* × (AG = H*i* ×) AH = BE × (AB: ma quando la figura BA*du*E gira intorno all'assintoto, le sue ordinate G*u*, H*i*, ec. BE descrivono delle superficie de' cilindri, le quali han per basi i circoli descritti dall' assisse AG, AH, ec. AB, e queste superficie altro non sono che i prodotti G*u* × (AG, H*i* × (AH, ec. BE × (AB; onde il so-

solido descritto dalla rivoluzione della figura BAduE non differisce dalla somma di queste superficie, o de' prodotti Gu × (AG, Hi × (AH, ec. ora la somma di questi prodotti equivale all'ultimo prodotto BE × (AB moltiplicato pel numero, che n' esprime la moltitudine, cioè per AB; però il solido equivale a BE × (AB × AB, ovvero BE × AB × (AB; cioè, se pigliasi una retta uguale a (AB, e che per essa si moltiplichi 'l quadrato ADEB, s'avrà 'l valore del solido: ma il prodotto del quadro ADEB per la linea uguale a (AB è un parallelepipedo ; onde il solido equivale a detto parallelepipedo.

Lo stesso si proverebbe coll'Aritmetica degl'Infiniti ; perocchè gli elementi Gu, Hi, ec. essendo reciprochi agli elementi CG, FH, ec. dell'angolo indefinito MAX, hanno per esponente — 1, mercè che l'esponente degli elementi CG, FH, ec. è 1 ; onde moltiplicando questi elementi Gu, Hi, ec. per le circonferenze delle loro assisse AG, AH, il cui esponente è 1, la serie de' prodotti avrà per esponente — 1 + 1, ovvero 0, ed in conseguenza questa serie sarà al suo ultimo termine BE × (AB moltiplicato pel numero de' termini AB, come 1 a 0 + 1, ovvero come 1 ad 1: così la somma delle superficie descritte dagli elementi Gu, Hi, o 'l solido sarà BE × AB × (AB ; dal che si scorge il perfetto accordo dell'Aritmetica degl'Infiniti colla Geometria.

53. *Sia una semiparabola ordinaria indefinita* Abrm (Fig.22.), *il cui parametro sia la linea* AB, *ed in cui sia condotta l' ordinata* ab *uguale al parametro, e in conseguenza alla sua assissa* aA (Lib.II.N.673.). *Se pigliansi delle terze proporzionali agli elementi* CG, FH, ec. *del compimento indefinito* mAX *e al parametro* AB, *e che dopo averle poste perpendicolarmente ad* AX *da* G *in* u, *da* H *in* i, ec. *si faccia passare una curva per le sue estremità, dico* 1°. *Che questa curva non incontrerà le rette* Ad, AX *se non se all' infinito*. 2°. *Che lo spazio indefinito compreso fra la curva e l' assintoto* Ad *è per così dire più ch' infinito, e che all' opposto lo spazio compreso fra la curva e l' altro assintoto* AX *è d' un valore finito, quantunque ei sia indefinito in lunghezza*.

Primieramente Ad è infinito in lunghezza, per essere terza proporzionale all'elemento del compimento parabolico, ch' è uguale a zero al punto A, e al parametro AB.

In secondo luogo, gli elementi del triangolo parabolico, che sono al di sotto dell'elemento bB = AB, son tanto maggiori di bB, od AB, quanto più da essi s'allontanano: così le terze pro-

 por-

porzionali a questi elementi e al parametro AB son tanto minori di BE = AB, quanto più si discostan dai medesimi; ciò non ostante la terza proporzionale non può diventar' infinitamente piccola, od uguale a zero, se non quando l'elemento mM del compimento sarà infinitamente grande per rispetto a bB: ma allora, per la proprietà della parabola, noi avremo $mM \cdot bB :: \overline{MA}^2 \cdot \overline{AB}^2$; dunque $\overline{MA}^2$ sarà infinitamente grande per rispetto ad $\overline{AB}^2$, ed in conseguenza MA sarà altresì infinitamente grande rispetto ad AB: così la curva non incontrerà la retta AX se non all'infinito.

In terzo luogo, a motivo di CG. AB :: AB. Gu, noi abbiam $CG \times Gu = \overline{AB}^2$, e a cagione di FH. AB :: AB. Hi abbiamo $FH \times Hi = CG \times Gu$; dunque Gu. Hi :: FH. CG: ma per la proprietà della parabola, FH. CG :: $\overline{AH}^2 \cdot \overline{AG}^2$; però Gu. Hi :: $\overline{AH}^2 \cdot \overline{AG}^2$, cioè l'ordinate all' assintoto AX sono fra se reciprocamente come i quadri delle loro assisse: ora l'assisse essendo fra esse come i numeri numerali 0. 1. 2. 3, ec. i loro quadrati han 2 per esponente; onde nello spazio indefinito $BAduE$ la serie degli elementi ordinati ad AX ha per esponente -2 (*N.* 28.), ed in conseguenza questa serie è al suo ultimo termine moltiplicato pel numero de'termini AB, cioè al quadro ABED, come 1 a $-2+1$, o come 1 a -1: così lo spazio indefinito $BAduE$ è per così dire più ch' infinito rispetto al quadro ABED; perocchè il suo rapporto a questo quadrato è come 1 a -1, il qual'è maggiore del rapporto di 1 a 0, ch' è infinito.

Ora, se all'altro assintoto Ad io conduco dell'ordinate Ts, Px ec. e che dalle loro estremità s, x ne tiri dell'altre sS, Mx all' assintoto AX, avrò $Ss = At$, $Mx = AP$, ec. a motivo delle parallele, e $Ts = As$, $Px = AM$, ec. ma Ss, Mx, ec. son reciproche a'quadri di AS, AM, ec. onde i quadrati dell' ordinate Ts, Px, ec. all' assintoto Ad sono altresì reciprochi alle loro assisse, ed in conseguenza le lor radici, cioè l'ordinate Ts, Px, ec. sono fra se reciprocamente come le radici quadre dell'assisse: ora l'assisse essendo come i numeri 0. 1. 2. 3, ec. le lor radici quadre han per esponente $\frac{1}{2}$; dunque nello spazio indefinito $DAXsE$ la serie degli elementi ordinati ad AD, ha per esponente $-\frac{1}{2}$, e però questa serie è al suo

ultimo

ultimo termine DE moltiplicato pel numero de' termini AD, cioè al quadro ABED, come 1 a $-\frac{1}{2}+1$, o come 1 a $\frac{1}{2}$, oovvero in fine come 2 ad 1: così lo ſpazio indefinito DAX*s*E è doppio del quadro ABED, e conſeguentemente egli è finito.

54. La curva da noi deſcritta è un'iperbola equilatera del terzo grado, e la ſua proprietà è tale, che ſe tiraſi qualſivoglia ordinata *i*N all'aſſintoto A*d*, il prodotto del quadro di queſt' ordinata per la ſua aſſiſſa AN è ſempre uguale al cubo di AB; perocchè, eſſendo l'ordinate H*i*, BE, ec. all'aſſintoto AX reciproche a' quadri delle loro aſſiſſe, abbiamo $Hi . BE :: \overline{BA}^2 . \overline{AH}^2$; dunque $Hi \times \overline{AH}^2 = \overline{BA}^2 \times BE = \overline{AB}^3$: ma $Hi = AN$, ed $iN = AH$, a cagione delle parallele; però $AN \times \overline{iN}^2 = \overline{AB}^3$.

All'oppoſto, ſe tiraſi qualſivoglia ordinata H*i* all'aſſintoto AX, il prodotto di queſt' ordinata pel quadro della ſua aſſiſſa AH equivale ſempre al cubo di AB, come s'è veduto.

55. Se in vece d'un compimento di parabola quadra ſi prendeſſe un compimento di prima parabola cuba, e che dopo aver preſo delle terze proporzionali a ciaſcuno de' ſuoi elementi, e al ſuo parametro, ſi terminaſſe 'l reſtante come ſopra, la curva deſcritta con tal mezzo ſarebbe un' iperbola del quarto grado, le cui proprietà ſi ſcoprirebbero facilmente non meno che quelle della precedente. S'avrebbon pure l' iperbole de' gradi ſuperiori, cioè del quinto, del ſeſto, ec. impiegando de' compimenti di prima parabola del quarto, quinto grado, ec.

CAPITOLO SECONDO.

Della Meccanica.

56. PER MECCANICA s'intende la Scienza del Moto, e le parti di eſſa ſon cinque; cioè le Leggi del Moto, la Statica, l'Idroſtatica, l'Areometria, e l'Idraulica.

57. Un corpo ſi dice in *moto*, quando è traſferito dall'uno all' altro luogo; e lo ſteſſo corpo dice in quiete, quando non cangia ſito.

58. La *Maſſa* d'un corpo è la quantità di materia, che lo com-

compone, e'l suo volume è la sua estensione in lunghezza, larghezza, e profondità.

59. La *Forza movente* d'un corpo è ciò, che a detto corpo conferisce il moto.

60. La *velocità* d'un corpo è un'effetto della forza motrice, per cui 'l corpo scorre un certo spazio in un tempo determinato: tal che se due corpi A, B in uno stesso tempo, ovvero in tempi eguali scorrono spazj eguali, le lor velocità saranno uguali; e se scorrono spazj disuguali, le loro velocità saran disuguali. La maggior'è quella, che fa scorrere uno spazio maggiore, e la minor quella, che ne fa scorrere un minore.

61. La *direzione* del moto d'un corpo è quella retta linea, lungo cui si concepisce, che detto corpo si muova.

Assiomi.

62. *Nulla si fa nella Natura senza qualche ragione.*

Se oggi una cosa è in un modo, e dimane in un'altro, vi sarà certo qualche ragione di questo cambiamento.

63. *Gli effetti sono proporzionali alle lor cause.*

Se una causa produce un tal'effetto, uno doppio, o triplo del medesimo non può esser prodotto se non da una causa doppia, o tripla.

64. *Qualunque corpo è indifferente sì al moto che alla quiete.*

Egli è incapace di elezione e volontà, e per conseguenza ei non può da se stesso cangiare stato.

Quindi ne segue, che se un corpo passa dal moto alla quiete dalla quiete al moto, o da una direzion di moto ad un'altra vi dee necessariamente essere qualche causa esterna produttrice di tali effetti.

65. *Se un corpo* A *doppio, o triplo,* ec. *d'un'altro corpo* B *scorre uno spazio uguale a quello, che da* B *vieno scorso nel medesimo tempo, la forza, ch'imprime il moto al corpo* A, *è doppia, o tripla,* ec. *della forza motrice di* B.

Supponiamo A, ch'io divido in due parti uguali fra loro e al corpo B, doppio di B. Per far'iscorrere a queste due parti uno spazio uguale a quello, che viene scorso da B, vi vorranno due forze uguali alla motrice di B: ma la forza movente l'intero corpo A produce il medesimo effetto; dunque, ec.

66. *Se un corpo* A *uguale ad un'altro corpo* B *scorre una spazio doppio, triplo,* ec. *di quello, che da* B *viene scorso nel medesimo tempo,*

tempo, *la forza motrice di* A *è doppia*, *o tripla*, ec. *della forza motrice di* B.

Per l'egualità de'corpi A, B, la forza di A produce lo stesso effetto, che produrrebbe, se la forza di B facesse scorrere a B uno spazio doppio, triplo, ec. di quello viene scorso da B: ma in tal caso la forza di B sarebbe doppia, o tripla di quello è, perchè l'effetto sarebbe doppio, o triplo, ec. dunque, ec.

67. Chiamasi *quantità di moto* d'un corpo il prodotto della sua massa per la sua velocità; imperocchè, siccome e'vi vuole più forza, quando la massa e la velocità son maggiori, così è manifesto, che per indicare la quantità di moto è necessario aver' in considerazione queste due cose. La quantità di moto serve a indicare la quantità della forza motrice, di cui essa è l'effetto, ed a cui conseguentemente ella è proporzionale.

Sieno p. e. la massa del corpo A = 1, quella del corpo B = 2, la velocità di A = 1, e quella di B = 3. La quantità di moto di A sarà dunque 1, e quella di B sarà *6*; ed in conseguenza le forze di questi due corpi saran pure come 1 a *6*, perchè tali quantità di moto saranno state da queste forze prodotte, e perchè le cause sono proporzionali a' loro effetti; il che si conferma eziandio con questo discorso. Se le velocità de'corpi A, B fossero uguali, la forza del corpo B sarebbe doppia della forza del corpo A, a cagione della massa di B doppia di quella di A (*N.65.*): ora, per conferire a B una velocità tripla di quella, ch'esso avrebbe secondo quest'ipotesi, vi vuole una forza tripla; e però questa forza esser dee sestupla di quella di A, giacchè 'l triplo del doppio è'l sestuplo. Così le forze di A e B esser debbono come 1 a *6*: ma 1 è'l prodotto della massa 1 del corpo A per la sua velocità 1, e *6* quel della massa 2 del corpo B per la sua velocità 3; onde le forze dei due corpi sono fra esse come i prodotti delle masse per le velocità, o come le quantità di moto.

68. Il moto d'un corpo si fa in *linea retta*, o *curva*: per linee curve s'intendon quelle, le quali di quando in quando mutan direzione, come sarebbe p. e. il circuito d'un poligono. Ora sì l'uno che l'altro di questi moti od è uniforme, o accelerato.

69. *Moto uniforme* chiamasi quello, per cui un corpo in tempi uguali scorre spazj eguali.

70. *Moto accelerato* quello dicesi, per cui un corpo in tempi eguali scorre spazj, i quali sempre vanno crescendo; e a questo corrispon-

de

de il moto ritardato, per cui un corpo in tempi eguali scorre spazj, i quali van sempre mancando.

71. Il moto non può accelerarsi se non quando un corpo dall'uno all'altro istante riceve nuovi aumenti di velocità; o provengano questi dalla prima forza motrice, o da altre forze, che lo sospingono nel suo cammino; così noi potremmo formarci infinite ipotesi d'accelerazione: si potrebbe p. e. concepire, che gli aumenti delle velocità fossero come i tempi, o come i quadrati de' tempi, o come i loro cubi, ec. o come alcune delle lor radici, ec. ma per non trattenerci in ispeculazioni al nostro soggetto inutili farem soltanto ragionamento di quel moto, ch' appellasi *uniformemente accelerato*, per cui un corpo in tempi uguali riceve aumenti di velocità eguali. Questo moto è quello de' corpi, che per la loro gravità tendono verso 'l centro della terra.

72. Il moto in oltre suddividesi in semplice, e composto: il semplice è quello prodotto da una sola ed unica forza; e 'l composto quello prodotto da due, o più forze, le quali hanno differenti direzioni, sieno queste forze uniformi, od accelerate, o l'une uniformi, e le altre accelerate.

Delle Leggi del Moto uniforme.

73. PROPOSIZIONE I[a]. *Nel moto uniforme d'un corpo gli spazj scorsi sono fra loro come i tempi impiegati a scorrerli.*

Poichè nel moto uniforme gli spazj scorsi in tempi eguali son' uguali, è manifesto, che se 'l corpo A in un dato tempo, p. e. in un minuto, scorre un dato spazio, in un tempo doppio, o triplo, ec. del primo dee scorrere uno spazio doppio, o triplo dello spazio scorso nel primo; e in conseguenza il secondo spazio scorso esser dee al primo, come il secondo tempo al primo.

74. Per abbreviare le dimostrazioni delle seguenti Proposte, nelle quali e' si considerano due corpi A, B in moto, chiameremo V la velocità del primo, T il tempo del suo moto, E lo spazio da esso scorso, M la sua massa, e Q la sua quantità di moto: così pure, chiameremo *u* la velocità del secondo corpo, *t* il tempo del suo moto, *e* lo spazio da esso scorso, *m* la sua massa, e *q* la sua quantità di moto.

75. PROPOSIZIONE II. *Nel moto uniforme, gli spazj scorsi da due corpi* A, B *sono in ragion composta delle velocità e de' tempi*,

pj, cioè gli spazj scorsi sono fra loro come i prodotti delle velocità per i tempi.

Supponiamo prima, ch'uguali sieno le velocità ed i tempi; ed egli lo saranno in conseguenza anche gli spazj scorsi E, e, non essendovi ragione, per cui l'uno de'due corpi scorrer debba spazio maggior dell'altro. Secondariamente supponiamo, ch'uguali sieno i tempi, ma che la velocità V di A sia doppia della velocità u di B: è manifesto, ch'allora lo spazio scorso da A sarà doppio dello spazio scorso da B; perocchè una velocità doppia d'un'altra fa nel medesimo tempo scorrere uno spazio doppio di quello, cui fa scorrer l'altra velocità. In fine supponiamo, non solo che la velocità V di A sia doppia della velocità u di B, ma eziandio che 'l tempo T del moto di A sia triplo del tempo t del moto di B: egli è pure manifesto, che 'l corpo A nel tempo T scorrerà uno spazio triplo di quello, ch'esso scorrerebbe nel tempo t (*N.73.*). Ora il corpo A nel tempo t scorrerebbe uno spazio doppio di quello, cui B scorrerebbe nel medesimo tempo, a motivo della sua doppia velocità; onde A nel tempo T scorrer dee uno spazio sestuplo di quello, cui B scorrerebbe nel tempo t: così gli spazj scorsi esser debbono fra loro come 6 ad 1. Ma 6 è 'l prodotto della velocità V = 2 del corpo A pel suo tempo T = 3, ed 1 il prodotto della velocità u = 1 del corpo B pel suo tempo t = 1; però noi abbiamo E. e : : 6. 1 : : TV. tu.

76. Dalla detta Proposizione noi possiamo agevolmente dedurre moltissimi Corollarj, siccome ora vedremo.

77. E. e :: TV. tu; dunque, se supponesi T = t, s'avrà E. e : : V. u; cioè *nel moto uniforme, gli spazj scorsi da due corpi* A, B *in tempi uguali sono fra loro come le velocità di detti corpi.*

78. E. e : : TV. tu; onde, se supponiamo V = u, avremo E. e : : T. t; cioè *nel moto uniforme, gli spazj scorsi da due corpi aventi eguali velocità sono fra loro come i tempi impiegati a scorrerli.*

79. E. e : : TV. tu; però, se supponesi V = u, e T = t, s'avrà E = e; il che si scorge ad evidenza.

80. E. e :: TV. tu; dunque Etu = eTV, e però V. u :: Et. eT; cioè *nel moto uniforme, le velocità* V, u *di due corpi sono in ragion composta della ragione diritta degli spazj* E, e, *e dell' inversa* t, T *de' tempi*; poichè la ragion composta di queste due ragioni è Et, eT.

81. Perchè $V . u :: Et . eT$; dunque dividendo la seconda ragione per T, e t, s'avrà $V . u :: \frac{E}{T} . \frac{e}{t}$, cioè *nel moto uniforme, le velocità di due corpi sono fra loro come gli spazj divisi per i tempi.*

Parimente, se in $V . u :: Et . eT$ dividesi prima l' ultima ragione per e, e quindi per E, s' avrà $V . u :: \frac{t}{e} . \frac{T}{E}$; cioè *nel moto uniforme, le velocità di due corpi sono fra loro scambievolmente come i tempi divisi per gli spazj.*

82. $E . e :: TV . tu$; onde $Etu = eTV$, e però $T . t :: Eu . eV$; cioè *nel moto uniforme, i tempi del moto di due corpi sono in ragion composta della ragione diritta* E, e *degli spazj, e dell' inversa* V, u *delle velocità.*

83. Poichè $T . t :: Eu . eV$; dunque dividendo l' ultima ragione per u, ed V, avremo $T . t :: \frac{E}{V} . \frac{e}{u}$, cioè *nel moto uniforme, i tempi del moto di due corpi sono fra loro come gli spazj divisi per le velocità.*

Similmente, se in $T . t :: Eu . eV$ dividesi l' ultima ragione per E, ed e, s'avrà $T . t :: \frac{u}{e} . \frac{V}{E}$; cioè *nel moto uniforme di due corpi, li tempi sono fra loro reciprocamente come le velocità divise per gli spazj.*

84. PROPOSIZIONE III. *Nel moto uniforme, le quantità di moto* Q, q *di due corpi* A, B *sono in ragion composta della ragione delle masse* M, m, *e delle velocità* V, u.

La quantità di moto, secondo la sua Diffinizione (*N.67.*), è'l prodotto della massa per la velocità; onde le quantità di moto de' corpi A, B sono fra loro come MV, mu: ma questa ragione è composta delle due M, m, ed V, u; dunque, ec.

85. $Q . q :: MV . mu$; dunque, se supponiamo $Q = q$, avremo $MV = mu$, e però $M . m :: u . V$; cioè *nel moto uniforme di due corpi, se uguali sono le quantità di moto, le masse saranno fra loro reciprocamente come le velocità.*

Quindi n' avviene, che se oltre $Q = q$ supponesi $M = m$, s' avrà $V = u$: così pure, se supponesi $Q = q$, ed $V = u$, s'avrà $M = m$.

86. $Q . q :: MV . mu$; onde $Qmu = qMV$, e per conseguenza $V . u :: Qm . qM$; cioè *nel moto uniforme di due corpi le* ve-

velocità sono in ragion composta della ragione diritta delle quantità di moto Q, q, *e dell' inversa* m, M *delle masse*.

87. Q. *q* : : MV. *mu*; onde Q*mu* = *q*MV, e però M. *m* : : Q*u* . *q*V; cioè *nel moto uniforme di due corpi, le masse* M, m *sono fra loro in ragion composta della ragione diritta delle quantità di moto* Q, q, *e dell' inversa* u, V *delle velocità*.

88. Noi sopra (*N.* 80.) abbiam ritrovato V. *u* : : E*t*. *e*T; onde, se moltiplicansi i termini di questa proporzione per quei dell'altra Q. *q* : : MV. *mu*, s'avrà QV. *qu* : : MVE*t*. *mue*T, ovvero QV. MVE*t* : : *qu* . *mue*T : dal che (come vedremo) si dedurranno moltissimi altri Corollarj.

89. QV. MVE*t* : : *qu*. *mue*T; però dividendo la prima ragione per V, e la seconda per *u*, avremo Q. ME*t* : : *q*. *me*T, ovvero Q. *q* : : ME*t*. *me*T; cioè *nel moto uniforme di due corpi, le quantità di moto sono in ragion composta della ragione diritta* M, m *delle masse, della ragion diritta* E, *e degli spazj, e dell' inversa* t, T *de' tempi*.

90. Poichè Q. *q* : : MEt. meT; però QmeT = qMEt, e quindi E. e : : QmT. qMt; cioè *nel moto uniforme di due corpi, gli spazj scorsi sono in ragion composta della ragione diritta delle quantità di moto* Q, q, *della ragion diritta de' tempi* T, t, *e dell' inversa* m, M *delle masse*.

91. Q. *q* : : MEt. meT; onde QmeT = qMEt, ed in conseguenza M. m : : QeT. qET; cioè *nel moto uniforme di due corpi, le masse sono fra loro in ragion composta della ragione diritta* Q, q *delle quantità di moto, della ragion diritta* T, t *de' tempi, e dell' inversa* e, E *degli spazj*.

92. Q. q : : MEt. meT; dunque QmeT = qMEt, e però T. t : : qME. Qme; cioè *nel moto uniforme di due corpi, i tempi sono fra loro in ragion composta della ragione diritta delle masse* M, m, *della ragion diritta degli spazj* E, e, *e dell' inversa* q, Q *delle quantità di moto*.

93. Se nell' analogie de' precedenti Corollarj supponiamo alcune grandezze fra loro uguali, potremo ancora inferirne dell'altre conseguenze: per esempio, se in Q. q : : MEt. meT supponesi Q = q, s'avrà MEt = meT; dunque 1°. T. t : : ME. me; cioè *uguali essendo le quantità di moto, i tempi sono fra loro in ragion composta delle ragioni diritte delle masse, e degli spazj*. 2°. E. e : : mT. Mt, cioè *uguali essendo le quantità di moto, gli spazj sono in ragion composta della ragione diritta de' tempi, e dell'*

inversa delle masse. 3°. M . m : : eT . Et ; cioè *uguali essendo le quantità di moto, le masse sono in ragion composta della ragione diritta de' tempi, e dell' inversa degli spazj; e così dell' altre.*

Delle Leggi del Moto uniformemente accelerato.

94. Il moto uniformemente accelerato, come s'è detto, è quello, la cui velocità in tempi uguali riceve accrescimenti uguali; cioè, che se nel primo istante il corpo ha un grado di velocità, nel secondo ne ha due, nel terzo tre, e così successivamente.

95. Si sà per gli sperimenti fatti in tutt'i luoghi, dov' è stato possibile il farli, la gravità de' corpi esser dovunque invariabilmente la stessa, tanto al di sopra, come al di sotto della superficie della Terra, e i gravi tendere verso 'l centro della Terra con moto accelerato: ora appunto sopra tali esperienze egli è fondata la dottrina del moto accelerato, il cui inventor' è 'l celebre Galileo.

96. PROPOSIZIONE III. *Nel moto uniformemente accelerato, gli spazj scorsi in tempi uguali, infinitamente piccioli, e successivi gli uni agli altri sono fra loro come i numeri* 1 . 2 . 3 . 4 . 5, ec.

Nel primo istante la forza motrice imprimendo al corpo un primo grado di velocità, li fa scorrere uno spazietto, il quale noi possiamo risguardare come uniformemente scorso, a cagione della durata infinitamente picciola di questo primo istante: così, se anche supponessimo che la forza motrice nel secondo istante non desse una nuova impressione al corpo, questo corpo non cesserebbe che di continuare a muoversi in virtù della prima velocità ricevuta, purchè non vi s'opponesse qualche ostacolo; e nel secondo istante egli scorrerebbe uno spazio uguale a quello, ch' avria scorso nel primo, poichè avrebbe lo stesso grado di velocità: ma siccome la forza motrice in questo secondo istante gl' imprime un secondo grado di velocità eguale al primo, così in vece di uno spazio ne scorre due, uguali ciascuno al primo. Parimente, se supponessimo, che la forza motrice nel secondo istante più non agisse sul corpo, nondimeno questo corpo in virtù dei due gradi di velocità ricevuti ne' due primi istanti scorrerebbe uno spazio uguale a quello, ch'avrebbe scorso nel secondo, cioè uno spazio doppio dello spazio scorso nel primo: ma siccome la forza motrice gl'imprime ancora un nuovo grado di velocità uguale al primo, così in vece di due spazj ne scorre tre, uguali ciascuno allo

lo spazio scorso nel primo istante; e con simil raziocinio scorgesi facilmente, che nel quarto istante il corpo dee scorrer' uno spazio quadruplo del primo, nel quinto uno spazio quintuplo, ec. e ch' in conseguenza gli spazj scorsi in istanti infinitamente piccioli, uguali e successivi esser debbono come i numeri 1. 2. 3. 4. 5. 6, ec.

97. La velocità del corpo in fine di qualsivoglia istante chiamasi *velocità acquistata*: così la velocità acquistata del terzo istante è 3, quella del quarto 4, ec.

98. Sia l'altezza AB d'un triangolo ABM (*Fig.* 23.) divisa in infinite parti uguali, e da' punti di divisione sieno tirati gli elementi CD, EF, ec. Se si concepisce, che l' altezza AB rappresenti 'l tempo, o la durata del moto d'un corpo, il quale muovesi con una velocità uniformemente accelerata, le particelle di detta linea rappresenteranno gl' istanti infinitamente piccioli, uguali e successivi, e gli elementi CD, EF, ec. rappresenteran gli spazj scorsi in quest' istanti, non meno che le velocità acquistate in fine de' medesimi; tal che gli spazj scorsi in ciascuno di quest' istanti sono fra loro come le velocità acquistate in fine di ciascun d' essi, col solo divario, ch' ogni spazio è interamente scorso nell' istante, a cui egli appartiene, là dove ogni velocità acquistata non ha ch' una parte, la quale sia stata prodotta nell' istante, a cui essa appartiene. Mi spiego: lo spazio EF scorso nel secondo istante è interamente scorso in questo secondo istante, quando la velocità EF acquistata in fine del secondo istante non è interamente prodotta in questo secondo istante; ma l' una delle sue parti EN è la stessa che la velocità CD acquistata in fine del primo istante, e l' altra NF è prodotta nel secondo: così la velocità acquistata in fine di qualsivoglia istante è la somma di tutte le velocità istantanee di tutti gl' istanti computando dall' origine del moto, quando lo spazio d' un' istante è interamente scorso in un' istante. Per esempio, la velocità SR acquistata in fine del quarto istante altro non è che la velocità CD acquistata in fine del primo, più la velocità NF acquistata dal primo al secondo, più la velocità IH acquistata dal secondo al terzo, più la velocità QR acquistata dal terzo al quarto, mentre lo spazio SR è interamente scorso nel quarto istante; il che pone una gran differenza fra gli spazj scorsi negl' istanti infinitamente piccioli, uguali e successivi, e le velocità acquistate in fine di quest' istanti.

99. PROPOSIZIONE IV. *Nel moto uniformemente accelerato, gli*

gli spazj scorsi in tempi uguali, successivi e sensibili (cioè in tempi, che non sieno infinitamente piccioli) sono fra loro come i numeri dispari 1. 3. 5. 7. 9, ec.

Si concepisca, che l'altezza AB del triangolo ABM (*Fig.* 24.) rappresenti 'l tempo, o la durata del moto d'un corpo, la cui velocità sia uniformemente accelerata: se quest' altezza fosse divisa in parti eguali ed infinitamente picciole, e che da' punti di divisione si tirassero gli elementi del triangolo paralleli alla base, le parti infinitamente picciole di AB rappresenterebbero gl'istanti infinitamente piccioli, uguali e successivi, di cui è composto il tempo AB; e gli elementi del triangolo rappresenterebbono gli spazj scorsi in quest' istanti.

Ora si concepisca l'altezza AB divisa in quattro parti uguali AC, CE, EG, GB; elle rappresenteran delle parti uguali del tempo AB, le quali non saranno infinitamente picciole: ma lo spazio scorso nel tempo sensibile AC altro non essendo che la somma degli spazj scorsi negl'istanti infinitamente piccioli componenti 'l tempo AC, sarà per conseguenza la somma degli elementi del triangolo ACD, cioè questo spazio sarà rappresentato dal triangolo ACD; per la stessa ragione, lo spazio scorso nel tempo AE, composto de' due primi AC, CE, sarà rappresentato dal triangolo AEF; lo spazio scorso nel tempo AG, composto de' tre primi AC, CE, EG, sarà rappresentato dal triangolo AGH, e in fine lo spazio scorso nel tempo composto dei quattro AC, CE, EG, GB sarà rappresentato dal triangolo ABM. Ora simili essendo i quattro triangoli ACD, AEF, AGH, ABM, sono fra se come i quadri delle loro altezze AC, AE, AG, AB, le quali son come i numeri 1. 2. 3. 4; onde questi triangoli sono fra loro come i quadrati 1. 4. 9. 16; e così gli spazj scorsi nel primo tempo, ne' due primi, ne' tre primi, e ne' quattro primi sono fra se come i numeri 1. 4. 9. 16: ma se dallo spazio 4 scorso ne' due primi tempi levasi lo spazio 1 scorso nel primo, il residuo 3 sarà lo spazio scorso nel secondo tempo; parimente, se dallo spazio 9 scorso ne' tre primi tempi levasi lo spazio 4 scorso ne' due primi, il residuo 5 sarà lo spazio scorso nel terzo tempo; in fine, se dallo spazio 16 scorso ne' quattro primi tempi togliesi lo spazio 9 scorso ne' tre primi, il residuo 7 sarà lo spazio scorso nel quarto tempo, e così successivamente: ora gli spazj 1. 3. 5. 7, ec. son la serie de' numeri dispari; dunque, ec.

100. *Gli spazj scorsi in fine del primo tempo, de' due primi, de'*

tre

tre primi, de' quattro primi, ec. sono fra loro come i quadri delle velocità acquistate in fine di questi tempi.

Per la precedente Dimostrazione, gli spazj scorsi in fine del primo tempo, de' due primi, de' tre primi, ec. sono fra se come i quadri di essi tempi: ora le velocità acquistate in fine di questi tempi sono fra loro come i tempi; poichè 1 essendo la velocità acquistata in fine del primo tempo, 2 è quella acquistata in fine del secondo, cioè in fine de' due primi, 3 quella acquistata in fine de' tre primi, ec. mercè che la velocità in tempi eguali riceve accrescimenti uguali; onde gli spazj scorsi in fine de' tempi, calcolando sempre i tempi dall'origine del moto, sono fra loro come i quadri delle velocità acquistate in fine de' medesimi tempi.

101. PROPOSIZIONE V. *I gravi scendono verso 'l centro della Terra con moto uniformemente accelerato.*

Si sa per esperienza, che i gravi discendono verso'l centro della terra con moto accelerato (*N.* 95.), e tale accelerazione non può derivare se non dalla loro gravità, che gli spigne ad ogni istante; perocchè se la lor gravità non li desse ch'una prima impressione, il loro moto sarebbe uniforme: ma la gravità è dovunque la stessa (*N.* 95.); onde ad ogni istante ella dà al corpo una nuova impressione uguale alla prima, ed in conseguenza i gradi di velocità, cui 'l corpo riceve ad ogni istante, sono fra se uguali: ora, quando gli accrescimenti di velocità in tempi eguali son' uguali, il moto è uniformemente accelerato; dunque i gravi scendono verso 'l centro della Terra con moto uniformemente accelerato.

102. Però se dividesi 'l tempo della discesa d'un corpo in parti sensibili, p. e. in secondi, gli spazj scorsi nel primo secondo, ne' due primi, ne' tre primi, ec. saranno come i quadrati 1. 4. 9, ec. di questi tempi, o come i quadri delle velocità acquistate in fine degli stessi.

103. NOTA. Che quanto s' è detto, dee solo intendersi di que' corpi, i quali non sono in molta distanza dalla superficie della Terra; perocchè siccome non si possono far esperienze in troppa distanza dalla superficie della Terra, così non si può nè meno sapere, se questa legge d'accelerazione sia dovunque la stessa.

104. PROPOSIZIONE VI. *Se un grave in un dato tempo discende verso'l centro della Terra, lo spazio scorso in fine di questo tempo altro non è che la metà dello spazio, ch' egli avrebbe scorso nell'*

nell' istesso tempo, se si fosse mosso con moto uniforme, e con una velocità uguale a quella da lui acquistata in fine di detto tempo.

Si concepisca, che l'altezza AB del triangolo ABM (*Fig.* 24.) rappresenti 'l tempo, in cui 'l corpo è disceso: se dividiamo quest' altezza in infinite parti eguali, che rappresenteranno gl' istanti infinitamente piccioli, di cui è composto il tempo AB, gli elementi del triangolo condotti da' punti di divisione rappresenteranno gli spazj scorsi in quest' istanti, e la base BM rappresenterà lo spazio scorso nell' ultimo istante, non meno che la velocità acquistata in fine dello stesso: ora, se 'l corpo nel tempo AB si fosse mosso con una velocità uniforme uguale a BM, cioè che in un' istante gli avesse fatto scorrere uno spazio uguale a BM, detto corpo avrebbe in ciascun' istante del tempo AB scorso uno spazio uguale a BM; ed in conseguenza lo spazio totale scorso nel tempo AB sarebbe stato BM preso tante volte, quanti sono gl' istanti contenuti in AB, ovvero BM moltiplicato per AB, cioè lo spazio totale scorso dal moto uniforme sarebbe stato rappresentato dal rettangolo ABM*m*: ma il triangolo ABM, rappresentante lo spazio totale scorso dal moto uniformemente accelerato, altro non è che la metà del rettangolo ABM*m*; dunque, ec.

105. PROBLEMA. *Dato lo spazio scorso da un moto accelerato in un certo tempo, conoscer quello, che dal corpo dee essere scorso in un' altro tempo, posto che i due tempi comincino entrambi all' origine del moto.*

Supponiamo, che 'l corpo in un minuto abbia scorso tre piedi, e che si chieda quanti egli n' avrebbe scorsi in tre. Faccio i quadrati 1. 9. de' tempi un minuto, tre minuti; e per la Regola del Tre dico: 1 è a 9, come lo spazio 3 piedi è ad un quarto termine 27, cioè allo spazio, che 'l corpo avrebbe scorso in tre minuti; poichè gli spazj 3 e 27, scorsi ne' tempi un minuto e tre minuti, sono fra loro come i quadri di detti tempi (*N.* 99.).

106. PROBLEMA. *Dato lo spazio scorso da un moto uniformemente accelerato in un certo tempo, conoscer quello, che dal corpo dovrebbe essere scorso in un' altro tempo, supposto che questo secondo non cominciasse che in fine del primo.*

Supponiamo, che 'l corpo in un minuto scorra tre piedi, e che si chieda quanti ei ne debba scorrer nei due susseguenti minuti. Aggiugno perciò il primo tempo 1 al secondo, il che fa 3, ed ho

ho due tempi 1 e 3, i quali cominciano entrambi all'origine del moto. Quindi facendo i quadri 1 e 9 di questi tempi, dico per la Regola del Tre: il quadrato 1 del primo tempo è al quadro 9 del secondo, come lo spazio tre piedi scorso nel primo è ad un quarto termine 27, ch'è lo spazio scorso nel secondo; onde dallo spazio 27 levando lo spazio 3 scorso nel primo tempo un minuto, il residuo 24 è lo spazio scorso ne' due minuti susseguenti.

107. PROBLEMA. *Dato'l tempo, in cui un corpo con moto uniformemente accelerato ha scorso un certo spazio, conoscer quello, in cui egli scorrerebbe un' altro spazio determinato supposto che i due tempi cominciassero entrambi all' origine del moto.*

Supponiamo, che'l corpo in due minuti abbia scorso otto piedi. Ora, per sapere quanto tempo egli vi vorrebbe a scorrerne 50, faccio'l quadrato 4 del primo tempo due minuti, e dico per la Regola del Tre: lo spazio 8 piedi scorso nel primo tempo due minuti è allo spazio 50, che dee essere scorso nel secondo, come il quadro 4 del primo tempo è ad un quarto termine 25, ch'è il quadrato del secondo. Onde estraendo la radice quadra 5 da questo quadrato, dico, che'l corpo scorrerebbe 50 piedi in 5 minuti, computando dall'origine del moto.

108. PROBLEMA. *Dato'l tempo, in cui un corpo ha scorso uno spazio determinato, conoscer quello, in cui egli scorrerebbe un' altro spazio determinato, posto che questo secondo tempo cominciasse soltanto in fine del primo.*

Supponiamo, che'l corpo in due minuti abbia scorso otto piedi. Ora, per sapere quanto tempo e'vi vorrebbe a scorrerne 42, supposto che'l suo moto continuasse, ai 42 piedi ne aggiugno 8, il che fa 50: così 50 piedi sono lo spazio, che dal corpo sarebbe scorso nel tempo ricercato, unito ai due primi minuti, e questi due spazj 8 piedi e 50 piè sarebbero l' uno e l' altro scorsi dappoi l'origine del moto; però facendo il quadro 4 del primo tempo due minuti, dico per la Regola del Tre: 8 piedi scorsi nel primo tempo due minuti sono a 50 piedi, che dal corpo sarebbero scorsi nel tempo ricercato unito al primo tempo 2 minuti, come il quadro 4 del primo tempo è ad un quarto termine 25, ch'è il quadro della somma del tempo cercato, e del primo. Ond' estraendo la radice quadra 5, ella sarà la somma del tempo ricercato, e del primo: ora, perchè in 5 minuti il corpo scorrerebbe 50 piedi, e poichè nei due primi ei ne scorre 8, scorrer dee

gli altri 42 ne' tre minuti susseguenti; così 'l corpo dovrebbe muoversi ancora per tre minuti.

109. PROBLEMA. *Dato lo spazio scorso in un certo tempo; conoscere gli spazj scorsi in tutte le parti di detto tempo.*

Supponiamo, che 'l corpo in 5 minuti abbia scorso 50 piedi; chiamo x lo spazio scorso nel primo minuto, e facendo i quadrati 25 ed 1 de' tempi 5 minuti ed un minuto, dico per la Regola del Tre: il quadro 25 del tempo 5 minuti è al quadrato 1 del tempo un minuto, come lo spazio 50 scorso nel tempo 5 è ad un quarto termine 2, cioè allo spazio x scorso nel primo: ora gli spazj scorsi nel primo, secondo, terzo, quarto minuto, ec. sono x. $3x$. $5x$. $7x$, ec. (*N.* 99.); onde ponendo 2 in vece di x, avremo 2. 6. 10. 14, ec. 18 per gli spazj scorsi in ciascuno de' 5 minuti, ed in fatti questi 5 spazj formano lo spazio totale scorso ne' 5 minuti.

110. PROBLEMA. *Dato il tempo totale del moto, e lo spazio scorso in una parte di detto tempo, la quale non abbia cominciato all' origine del moto, trovar lo spazio scorso in tutte le parti di esso.*

Supponiamo, che 'l moto abbia durato 9 minuti, e che nei due ultimi il corpo abbia scorso 32 piedi: chiamo x lo spazio scorso nel primo minuto; dunque lo spazio scorso nel secondo sarà $3x$, quello scorso nel terzo sarà $5x$, quello scorso nel quarto sarà $7x$, ed in fine quello scorso nel quinto sarà $9x$; e conseguentemente lo spazio scorso ne' due ultimi, cioè nel quarto e quinto, sarà $7x + 9x = 16x$. Quindi noi avremo $16x = 32$, e però $x = 2$: così lo spazio scorso nel primo minuto sarà 2 piedi, e ponendo questo valor di x in $3x$, $5x$, $7x$, e $9x$, avremo 6, 10, 14, e 18 per gli spazj scorsi nel secondo, terzo, quarto e quinto minuto.

111. PROPOSIZIONE VII. *Nel moto uniformemente ritardato, gli spazj scorsi da un corpo in tempi infinitamente piccioli, uguali e successivi sono fra loro come i numeri* 1. 2. 3. 4. 5. 6, *ec. presi retrogradando.*

Il moto uniformemente ritardato è quello, per cui 'l corpo ad ogni istante soffre diminuzioni eguali di velocità. Ciò posto.

S'è già dimostrato, che quando un corpo si muove con moto uniformemente accelerato, cioè quando ad ogni istante egli riceve gradi eguali di velocità, gli spazj da esso scorsi in tempi infinitamente piccioli, uguali e successivi van sempre crescendo d' una

quan-

quantità uguale, e sono in conseguenza come i numeri 1. 2. 3. 4. 5. 6, ec. presi direttamente; onde, quando 'l corpo muovesi con moto uniformemente ritardato, cioè quando ad ogni istante egli perde gradi di velocità eguali, gli spazj scorsi in istanti infinitamente piccioli, uguali e successivi debbon diminuir sempre d' una medesima quantità, e per conseguente esser debbono come i numeri 1. 2. 3. 4. 5. 6 presi retrogradando.

112. Se dunque l'altezza BA del triangolo ABM (*Fig.* 23.) rappresenta la durata del moto uniformemente ritardato d'un corpo, le parti infinitamente picciole ed uguali di quest'altezza rappresenteranno gl'istanti infinitamente piccioli, uguali e successivi componenti 'l tempo totale del moto; e gli elementi di questo triangolo, cominciando dalla base BM, rappresenteranno gli spazj scorsi in istanti infinitamente piccioli, uguali e successivi, e le velocità rimanenti in fine di questi tempi. Supponiamo, p. e. che 'l corpo cominci a muoversi con una velocità uguale a BM, cioè con una velocità, la quale in un picciolo istante li faccia scorrere uno spazio uguale a BM; lo spazio scorso in fine del primo istante sarà rappresentato dall' elemento del triangolo, che succede ed è minore di BM, perchè la velocità in fine di quest'istante è minore. Similmente, lo spazio scorso in fine del secondo istante sarà rappresentato dal terzo elemento del triangolo, e così a mano a mano.

113. PROPOSIZIONE VIII. *Nel moto uniformemente ritardato, gli spazj scorsi da un corpo in tempi uguali, successivi, ma sensibili sono fra loro come i numeri dispari* 1. 3. 5. 7, ec. *presi retrogradando.*

Supponiamo, che la base BM del triangolo ABM (*Fig.* 24.) rappresenti la velocità, con cui 'l corpo comincia a muoversi, cioè una velocità, la quale in un tempo infinitamente picciolo li faccia scorrere uno spazio uguale a BM, e che l' altezza AB di questo triangolo rappresenti la durata del moto, cui noi supporremo di 4 minuti. Divido ugualmente quest' altezza in quattro parti, ciascuna delle quali rappresenterà in conseguenza un minuto: così lo spazio scorso nel primo minuto sarà rappresentato dal trapezoide GHMB; perocchè altro non è questo spazio che la somma degli spazj scorsi ne'tempi infinitamente piccioli, uguali e successivi componenti 'l primo minuto, cioè la somma degli elementi del trapezoide GHBM: per la stessa ragione, lo spazio scorso nel secondo minuto GE sarà rappresentato dal trapezoi-

de EFHG, quello scorso nel terzo sarà rappresentato dal trapezoide CDFE, e quello scorso nel quarto dal triangolo ACD: ora i triangoli ABM, AGH, AEF, ACD, essendo fra se come i quadri delle loro altezze AB, AG, AE, AC, sono in conseguenza come i numeri 16. 9. 4. 1; onde, se dal primo triangolo ABM $= 16$ levo il secondo triangolo AGH $= 9$, il residuo 7 sarà 'l trapezoide GBHM. Parimente, se dal secondo triangolo AGH $= 9$ levo il terzo AEF $= 4$, il residuo 5 sarà 'l trapezoide EFGH. Finalmente, se dal terzo triangolo AEF $= 4$ tolgo l'ultimo ACD $= 1$, il residuo 3 sarà'l trapezoide CDFE; dunque i tre trapezoidi e l'ultimo triangolo ACD saran fra loro come 7. 5. 3. 1, ed in conseguenza gli spazj scorsi in ciascuno dei 4 minuti saranno fra se come questi stessi numeri, cioè come i numeri dispari 1. 3. 5. 7, ec. presi retrogradando.

114. PROPOSIZIONE IX. *Se un grave viene da qualsisia forza sospinto da basso in alto, il suo moto è uniformemente ritardato.*

Mentre che 'l corpo ascende per l'impressione della forza motrice, la sua gravità li conferisce ad ogni istante dell'impressioni contrarie, le quali gli fan perdere de' gradi di velocità uguali: ora, quando un corpo in moto perde gradi di velocità eguali, il suo moto è uniformemente ritardato; dunque, ec.

115. PROPOSIZIONE X. *Se un grave disceso in un dato tempo verso 'l centro della Terra è rispinto da basso in alto con una velocità uguale a quella da lui acquistata in fine di detto tempo, in un secondo tempo uguale al primo ei risalirà ad un'altezza uguale a quella, da cui è disceso, e scorrerà lo stesso spazio.*

Supponiamo, che in 4 minuti rappresentati dalle quattro parti eguali AC, CE, EG, GB dell'altezza AB (*Fig* 24.) del triangolo ABM il corpo discendendo scorra uno spazio rappresentato dal triangolo ABM; dunque lo spazio scorso nel primo minuto sarà rappresentato dal triangolo ACD, quello scorso nel secondo sarà rappresentato dal trapezoide CDFE, quello scorso nel terzo dal trapezoide EFHG, e quello scorso nel quarto dal trapezoide GHMB: ma se la gravità cessasse d'agire in fine del primo minuto AC, il corpo in virtù della sua velocità acquistata CD in fine di quest'istante scorrerebbe uno spazio rappresentato dal parallelogramo CDNE; perocchè in quest' ipotesi uniforme essendo la sua velocità CD, in ciascuno degl' istanti infinitamente piccioli componenti 'l secondo minuto CE ella gli farebbe scorrere uno spazio uguale a CD; onde lo spazio, cui la gravità fa scor-

rere

rere nel secondo minuto independentemente dalla velocità acquistata in fine del primo, è 'l triangoletto DNF uguale al triangolo ACD scorso nel primo minuto. Così ancora, se la gravità cessasse d' agire in fine del secondo minuto, il corpo in virtù della sua velocità acquistata EF in fine di questo minuto scorrerebbe nel terzo il parallelogrammo EFRG; e conseguentemente lo spazio, cui la gravità fa scorrere in questo terzo minuto independentemente dalla velocità acquistata, è 'l triangolo FRH uguale al triangolo ACD scorso nel primo; e per la stessa ragione lo spazio, cui la gravità fa scorrere nel quarto minuto independentemente dalla velocità acquistata in fine del terzo, è 'l triangolo HPM uguale al triangolo ACD: tal che gli spazj, cui la gravità fa scorrere in ciascuno dei quattro minuti independentemente dalle velocità acquistate in fine di essi, son tutti fra loro uguali.

Ora supponiamo, ch' una forza rispinga 'l corpo da basso in alto con una velocità uguale alla velocità acquistata BM in fine dei 4 minuti. Se questo corpo non trovasse ostacoli, nel primo minuto GB egli scorrerebbe il parallelogrammo GSMB; perocchè uniform' essendo in quest' ipotesi la sua velocità BM; in ciascuno degl' istanti infinitamente piccioli componenti 'l minuto GB ella li farebbe scorrere uno spazio uguale a BM: ora siccome la gravità, che s' oppone al suo passaggio, gli fa in questo minuto perdere un grado di velocità uguale a quello, che da essa li verrebbe conferito, se discendesse, così questa gravità l' impedisce di scorrere un triangoletto HSM uguale al triangolo HPM, od ACD; e però il corpo non dee in questo minuto scorrere se non se il trapezoide GHMB da lui già scorso nel quarto minuto, mentre discendea. Parimente, se in fine del primo minuto GB la gravità cessasse d'agire, il corpo in virtù della sua velocità restante GH nel secondo minuto GE scorrerebbe il parallelogrammo GHTE: ma siccome la gravità l'impedisce di scorrere il triangoletto TEH uguale al triangolo ADC, così ei non iscorre che 'l trapezoide. Per la stessa ragione, nel terzo minuto CE ei scorre il trapezoide EFDC, e nel quarto CA il triangolo ACD: ora i tre trapezoidi BMHG, GHFE, EFDC giunti al triangolo ADC compongono il triangolo totale ABM, cioè lo spazio scorso discendendo in 4 minuti; onde risalendo il corpo in 4 minuti scorre lo stesso spazio, che discendendo egli avea scorso in 4.

116. PROPOSIZIONE XI. *Se due, o più gravi fra loro disuguali discendono verso 'l centro della Terra, gli spazj da essi scorsi in uno stesso tempo sono fra se uguali.*

Sup-

Supponiamo, ch'un corpo A abbia una massa doppia di quella d'un'altro corpo B, e ch'amendue in un minuto discendano verso'l centro della Terra: concepisco esser'A diviso in due parti C, D fra se uguali, ed in conseguenza uguali ciascuna alla massa del corpo B; onde la parte C, discendendo in un minuto, descriverà uno spazio uguale a quello scorso da B; imperocchè, uguali essendo le masse C e B, a torto direbbesi, che la gravità dell'una è maggior della gravità dell'altra. Similmente, la parte D in un minuto descriverà uno spazio uguale a quello descritto da B, ed in conseguenza C e D, discendendo insieme, descriveranno ancora lo stesso spazio: ma D e C pres'insieme compongono il corpo A; dunque A in un minuto dee scorrer lo stesso spazio di B.

117. NOTA. Ch'io quì suppongo discendere i corpi in un mezzo, il quale lor non faccia resistenza; e quindi se talvolta la pratica è contraria a quanto ho asserito, ciò nasce dalla resistenza dell'aria.

AVVERTIMENTO. La dottrina del moto uniformemente accelerato, o ritardato ha fatto cadere l'uno de' più begl'Ingegni del nostro Secolo, cioè Mr. Leibnizio in un'error'assai grave, il quale tuttavolta non cessa d'avere anche al dì d'oggi molt'illustri Partigiani. Distingue il medesimo nel moto uniformemente accelerato, o ritardato due sorte di forza, l'una da lui detta forza *morta*, e l'altra forza *viva*. La forza morta è quella, che spigne un corpo senza poter superare l'ostacolo, che s' oppone al suo moto; tal'è la gravità, quando spigne un corpo, il quale trovasi invincibilmente trattenuto da un piano orizzontale: la viva poi è quella, ch'attualmente pone il corpo in moto. Secondo questo rinomato Autore, le forze morte sono fra loro come i prodotti delle masse per le velocità, ch'elle procurano di dare al corpo, e le vive son come i prodotti delle masse per i quadri delle velocità: or'ecco su che egli fonda questa sua pretensione.

Supponiamo, che due corpi A, B (*Fig.* 25.) discendano verso'l centro della Terra, l'uno in due minuti AC, CD, e l' altro in tre BE, EF, FG: gli spazj scorsi da questi corpi saran rappresentati dai triangoli simili ADH, BGL, i quali sono fra loro come i quadri de' tempi AD, BG, durante cui avrà perseverato il lor moto; e le velocità acquistate in fine di questi tempi saran rappresentate dalle basi DH, GL di questi triangoli, le quali sono fra se come le loro altezze. Ora supponiamo, che questi corpi, dopo avere scorso i loro spazj, sieno rispinti in alto

alto colle lor velocità acquistate: in tempi uguali ai primi essi scorreranno risalendo gli stessi spazj, che hanno già scorsi discendendo; e in fine di questi spazj, le forze, che li faran risalire, saranno distrutte, e la gravità incomincierà di bel nuovo a far discendere questi corpi verso'l centro della Terra; dunque, conchiude M^{r}. Leibnizio, poichè queste forze si consumano, facendo ai corpi scorrer questi spazj, fa di mestiere, ch'elle sieno fra loro come le masse moltiplicate per gli spazj: ma gli spazj son come i quadri delle velocità; onde quì le forze sono come le masse moltiplicate per i quadri delle velocità.

Ora, per dimostrare la fallacia di questo raziocinio, dico 1°. che le forze di questi due corpi sono distrutte non a cagione degli spazj da essi scorsi, ma degli ostacoli da' medesimi incontrati, cioè a motivo dell'impressioni contrarie della gravità. In fatti si concepisca, che quando questi corpi sono in alto rispinti colle lor velocità acquistate DH, GL, la gravità cessi d'agire sopra essi. E' manifesto, che'l primo in virtù della sua velocità DH, la quale in quest'ipotesi sarà uniforme, scorrerà nel primo minuto DC, risalendo, il parallelogrammo DCMH; e che'l secondo in virtù della sua velocità GL scorrerà nel primo minuto GF il parallelogrammo GFPL: che le forze di questi due corpi saranno fra se come i prodotti delle masse per le loro velocità DH, GL, mercè che gli spazj scorsi in tempi eguali, ovvero i parallelogrammi DCMH, GFPL, avendo l'altezze uguali, saranno fra loro come le lor basi DH, GL: e che finalmente queste forze niente avràn perduto per aver fatto scorrere questi spazj; perocchè in un secondo tempo uguale al primo, in un terzo, in un quarto, e così successivamente in infinito esse farebbero ai corpi scorrer degli spazj uguali ai primi, se pure qualche strano ostacolo e'non s'opponesse al loro moto.

Secondariamente io dico, che se i due corpi A, B, risalendo, scorrono gli spazj ADH, BGL, i quali sono fra se come i quadrati delle lor velocità, ciò non proviene dalla natura delle loro forze, ma unicamente dalla natura degli ostacoli ch'essi incontrano, i quali proporzionali non sono alle velocità; perocchè la gravità del corpo A, opponendosi al suo moto durante il primo minuto DC, l'impedisce di scorrere il picciolo spazio HMN uguale allo spazio NZH, ch'essa li fece scorrere nel secondo minuto, mentre discendea, independentemente dalla velocità acqui-

stata

ſtata in fine del primo. Così ancora la gravità del corpo B, opponendoſi al ſuo moto durante il primo minuto GF, l'impediſce di ſcorrere il picciolo ſpazio QPL, e in conſeguenza di quedi due ſpazj HMN, QPL non iſcorſi, cadaun corpo perde un grado di velocità: ma un grado di velocità riſpetto alla velocità 2 del primo corpo è maggiore che un grado di velocità riſpetto alla velocità 3 del ſecondo, e conſeguentemente gli oſtacoli incontrati da queſti due corpi nello ſteſſo tempo non ſono proporzionali alle lor velocità. Egli è dunque evidente, che nel ſecondo minuto la gravità impedendo il corpo A di ſcorrere il picciolo ſpazio ARN, e'l ſecondo di ſcorrere il picciolo ſpazio TSQ, leva ancora a ciaſcuno de' corpi un grado di velocità non proporzionale alle lor velocità rimanenti; poichè 1 è maggiore riſpetto alla velocità rimanente 1 del primo corpo di quello ſia riſpetto alla velocità rimanente 2 del ſecondo. Dunque, ec.

In terzo luogo io dico, che le forze de' due corpi A, B ſono fra loro come le maſſe moltiplicate per le velocità, e non come le maſſe moltiplicate per i quadri delle velocità; poichè le forze ſono fra ſe come gli oſtacoli, che le diſtruggono. Una forza, per eſempio, atta a far'iſcorrere ad un corpo due piedi in un minuto, ſecondo una certa direzione, non può eſſer diſtrutta ſe non da un'altra forza, la quale nello ſteſſo minuto faccia ſcorrer' a detto corpo due piedi in direzione oppoſta, ovvero da un' equivalente oſtacolo. Eſaminiam dunque quali ſieno gli oſtacoli incontrati dai noſtri due corpi: il primo A nel primo minuto trova un'oſtacolo, che l'impediſce di ſcorrere il picciolo ſpazio NMH, o che li farebbe ſcorrer lo ſteſſo ſpazio in direzione oppoſta, e nel ſecondo minuto egl'incontra un'oſtacolo, che l' impediſce di ſcorrere il picciolo ſpazio ARN, o che glie lo farebbe ſcorrer' in verſo oppoſto; e queſti ſono i due oſtacoli eguali, che diſtruggon la forza di A. Parimente, il corpo B nel primo minuto trova un' oſtacolo, che l'impediſce di ſcorrere lo ſpazio QPL; nel ſecondo ei trova un'oſtacolo, che l'impediſce di ſcorrere lo ſpazio TSQ, e nel terzo egli trova un'oſtacolo, che l'impediſce di ſcorrere lo ſpazio BXT; e queſti ſono i tre oſtacoli, che diſtruggon la ſua forza. Ora ciaſcuno dei due oſtacoli, che diſtrugono la forza di A, è uguale a ciaſcuno dei tre, che diſtruggon la forza di B; onde gli oſtacoli, che diſtrugono la forza di A, ſono a quei, che diſtruggon la forza di B, come 2 a 3, o come la velocità di

di A è alla velocità di B; e però la forza di A è a quella di B, come la massa A moltiplicata per la sua velocità 2 è alla massa B moltiplicata per la sua velocità 3.

Del Moto composto di due, o più forze uniformi.

118. Se un corpo A (*Fig.* 26.) è spinto da due forze uguali con direzioni opposte CA, DA, ei dee rimanere in quiete, non essendovi alcuna ragione, per cui s'abbia ad asserire, che l' una delle due prevaler debba all'altra: ma se l'una delle due forze, per esempio la forza C, è maggiore della forza D, C perderà una parte uguale a D, e detta forza G muoverà il corpo col restante della sua forza; il che è per se evidente.

Se un corpo A (*Fig.* 27.) è spinto da due forze con delle direzioni AB, AC fra loro non opposte, dette due forze nulla perderanno, e faran ciascheduna il loro effetto; perocchè non essendo queste due direzioni opposte, nulla evvi, ch' impedisca il corpo di prendere una direzion media, la quale sia composta delle due: p. e. se supponiamo, che la prima possa al corpo far'iscorrere lo spazio AC nel medesimo tempo, che l'altra può fargli scorrere lo spazio AB, è manifesto, che se si fa'l parallelogrammo ABCH delli due spazj AC, AB, e che'l corpo trovisi in H nello stesso tempo ch'ognuna delle forze gli ha fatto scorrere il suo spazio, detto corpo avrà ubbidito a due direzioni per volta; giacch'egli si troverà lungi dalla linea AC dello spazio CH = AB, e dalla linea AB dello spazio BH = AC, nè alcun'ostacolo e'si sarà opposto a questo moto.

119. PROPOSIZIONE XII. *Se un corpo* A (Fig. 28.) *è spinto da due forze, e che l' una di esse li faccia secondo la direzione* AC *scorrere uno spazio* AC *nel tempo stesso che l'altra secondo la direzione* AB *li fa scorrer lo spazio* AB, *dico; che se si fa'l parallelogrammo* ABHC *dei due spazj, il corpo* A *scorrerà la diagonale* BH *nel medesimo tempo, ch' ognuna delle forze li farebbe scorrere il suo spazio.*

Chiamo x la forza, che farebbe scorrere AC, e z quella, che farebbe scorrer' AB; concepisco, che gli spazj AC ed AB sien divisi in uno stesso numero di parti eguali, e conseguentemente fra loro proporzionali, e che'l tempo della durata del moto giusta AC, od AB sia altresì divisa in un medesimo numero d'istanti eguali: così le parti AM, MN, ec. dello spazio AC rappre-

senteranno gli spazj, che dovrebbero essere scorsi secondo la direzione AC in quest'istanti eguali, e le parti AQ, QR, ec. dello spazio AB rappresenteranno gli spazj, che dovrebbono esser' isconsi secondo AB: ciò posto.

Non potendo il corpo A nel primo istante scorrere lo spazietto AM, cui la forza *x* farebbegli scorrere se agisse da se sola, nè lo spazietto AQ, che *z* li farebbe scorrere, se l'altra non agisse unitamente ad essa, è necessario, che questo corpo trovisi in un punto lontano da AM d'una grandezza uguale allo spazio AQ, e da AQ d'una grandezza uguale allo spazio AM; onde facendo il parallelogrammo AQTM degli spazj AQ, AM, il corpo A dee trovarsi in T in fine del primo istante: ora, simili essendo i parallelogrammi AQTM, ABHC a cagione de'lati AM, AC proporzionali a'lati AQ, AB, se tiransi le diagonali AT, AH, elle caderanno l'una sopra l'altra, ed in conseguenza il termine T della diagonale AT caderà su un punto T della diagonale AH, e'l corpo troverassi sopra detta diagonale in fine del primo istante.

Parimente, non potendo il corpo ne'due primi istanti scorrere gli spazj AN, AR, che le forze *x*, *z* farebbongli scorrere, se agissero da se sole, bisogna, che all'angolo V del parallelogrammo ARVN trovinsi degli spazj AN, AR: ora i parallelogrammi ARVN, ABHC son simili, a motivo de'lati AN, AC proporzionali a'lati AR, AB; dunque le loro diagonali AV, AH debbono cadere l'una sopra l'altra, e però il corpo A, che trovasi in V, esser dee sopra la diagonale AH; e si proverà, che in tutti gli altr' istanti il corpo A esser dee sopra la diagonale AH, e trovarsi in H nel medesimo tempo, ch'ei si troverebbe in C, o B, se fosse spinto da due forze separatamente.

120. Le forze *x*, *z*, che prese a parte farebbero al corpo A scorrere gli spazj AC, AB, diconsi forze *componenti* del moto composto, e sono *equivalenti* ad una terza forza, la quale agendo da se sola farebbe al corpo A scorrere la diagonale AH nel tempo stesso, ch'ella vien fatta scorrer dalle medesime.

121. Siccome non evvi alcuna retta linea AB (*Fig. 29.*), intorno a cui non si possano descrivere infiniti parallelogrammi AMBC, ANBD, ec. così ancora egli non v'è alcuna forza semplice atta a fare in un dato tempo scorrer la diagonale, che considerar non si possa come equivalente ad un'infinità di forze prese due a due, le quali farebbero scorrere i lati de' loro parallelogrammi

nel

nel tempo stesso, ch'ella farebbe scorrer la diagonale. Per esempio, la forza, che farebbe scorrer la diagonale AB, è equivalente alle due, che prese separatamente farebbero nell' istesso tempo scorrere i lati AM, AC del parallelogrammo AMBC, e alle due, che farebbero nel medesimo tempo scorrere i lati AN, AD del parallelogrammo ANBD, ec.

122. Data la forza composta AB, e gli angoli con essa lei fatti dalle direzioni componenti, si potranno sempre conoscer le forze componenti; poich'ella è facil cosa intorno alla diagonale AB coi dati angoli descrivere il parallelogrammo AMBC, i cui lati AM, AC esprimano le forze componenti, cioè gli spazj, ch'elle farebbero scorrere secondo le lor direzioni nel medesimo tempo, che la composta farebbe scorrer la diagonale AB. Parimente, dati gli spazj AM, AC, cui le forze componenti farebbero scorrere, e la diagonale AB, si potran conoscere le forze componenti, facendo sopra AB con AC e CB = AM il triangolo ACB, e poi terminando 'l parallelogrammo AMBC, i cui lati AM, AC esprimeranno le forze componenti: ma se dati non sono nè gli angoli delle direzioni delle componenti, nè gli spazj, ch' elle farebbero scorrere, non si può precisamente conoscere quali sieno le forze componenti di AB, potendosene già trovare un' infinità (*N.* 121.).

123. La forza composta di due forze componenti è tanto maggiore, quanto l' angolo fatto dalle direzioni fra loro è più acuto; perocchè supponiamo, che le due componenti sieno espresse dalle rette AB, AC (*Fig.* 30.), il cui parallelogrammo è ACDB: la forza composta farà espressa da AD. Ora, se colle due forze AB, AC io faccio un angolo più acuto *cAb*, è manifesto, che terminando 'l parallelogrammo *Acdb*, l' angolo *Abd* sarà maggiore dell' angolo ABD, e però la base *Ad* del triangolo *Abd* sarà maggior della base AD del triangolo ABD: ma *Ad*, essendo la diagonale del parallelogrammo *Acdb*, è la forza composta delle due *Ac*, *Ab* sotto l' angolo *cAb*; dunque questa è maggiore della forza AD composta delle stesse forze sotto l' angolo CAB.

124. PROPOSIZIONE XII. *La forza composta* AH (Fig. 28.) *è all' una delle forze componenti* AB, *come il seno dell' angolo* BAC *formato dalle direzioni* AB, CA *delle due forze componenti è al seno dell' angolo* CAH *formato dalla direzione dell' altra forza* AC *colla direzione* AH *della composta; e le due componenti sono fra*

loro reciprocamente, come i seni degli angoli formati dalle lor direzioni con quella della composta.

Poichè le forze x e z farebbero scorrer l'una lo spazio AC, e l'altra lo spazio AB nel tempo stesso, in cui la composta fa scorrere lo spazio AH, le velocità, che queste tre forze darebbero al corpo A, sarebbon dunque fra loro come gli spazj AC, AB, AH, ed in conseguenza le forze sono fra se come le quantità di moto A × AC, A × AB, ed A × AH, cioè come le velocità AC, AB, AH, ovvero come i tre lati AC, CH, AH del triangolo AHC, a cagione di AB = CH: ora i tre lati di questo triangolo sono fra loro come i seni degli angoli, a cui essi son' opposti; però le forze sono fra se come questi seni, e conseguentemente la forza AH è alla forza CH, od AB, come il seno dell'angolo ACH è al seno dell'angolo CAH: ma il seno dell' angolo ACH equivale al seno dell'angolo CAB compimento a due retti dell'angolo ACH; onde la forza AH è alla forza CH, od AB, come il seno dell'angolo CAB, fatto dalle direzioni delle componenti, è al seno dell' angolo CAH formato dalla direzione AC dell'altra forza colla direzione AH della composta.

Così pure, il lato AC è al lato CH, od AB, come il seno dell'angolo AHC è al seno dell'angolo CAH; dunque la forza AC è alla forza HC, come il seno dell' angolo AHC è al seno dell'angolo CAH: ma l' angolo AHC equivale al suo alterno BAH; però la forza AC è alla forza CH, od AB, come il seno dell' angolo BAH è al seno dell' angolo CAH, cioè queste due forze sono fra loro reciprocamente come i seni degli anogli fatti dalle lor direzioni con quella della composta.

125. PROBLEMA. *Spinto un corpo da più forze espresse dalle rette* AB, AC, AD, *rinvenire la forza, che ne dee risultare, e la sua direzione* (Fig. 31.).

Faccio 'l parallelogrammo ABEC delle forze AB, AC, e la diagonale AE rappresenta la forza equivalente alle due AB, AC: così, in vece delle due AB, AC ponendo la forza AE, faccio 'l parallelogrammo AEFD delle forze AE, AD, ed essendo la forza AF equivalente alle due AE, AD, ell'è per conseguenza equivalente alle tre forze AB, AC, AD; donde avviene, che 'l corpo A, spinto dalle tre forze AB, AC, AD, scorrer dee secondo la direzione AF lo spazio AF nel tempo stesso, che l' altre tre forze prese separatamente farebbongli scorrere gli spazj AB, AC, AD.

Del

Del Moto composto d'una forza uniforme, e d' una forza uniformemente accelerata, in cui trattasi del moto de' projetti, o sia de' corpi gettati, e del tiro delle Bombe.

126. Un corpo è *gettato perpendicolarmente*, quando è spinto con una direzione perpendicolare all'orizzonte; egli è *gettato orizzontalmente*, quando la sua direzione è all'orizzonte parallela; in fine egli è *gettato obbliquamente*, quando è spinto con una direzione obbliqua all'orizzonte, ed allora l'angolo formato dalla direzione coll'orizzonte appellasi *angolo di direzione*.

127. *Se un corpo è gettato perpendicolarmente, il suo moto è sempre perpendicolare all' orizzonte*.

Perocchè, mentre 'l corpo segue la sua prima direzione da basso in alto, la gravità, che giammai l'abbandona, fa insensibilmente mancare la sua forza, e quindi lo rispigne d'alto abbasso verso'l centro della Terra, cioè ancora perpendicolarmente all' orizzonte; onde il corpo dee sempre esser nella verticale.

Quindi ne segue, che se si tirasse una bomba con una direzion verticale, essa ricaderebbe precisamente nel mortajo, quando l'agitazione dell' aria, per cui passasse, non le facesse cangiar direzione.

128. PROPOSIZIONE XIII. *Se un corpo* A (Fig. 32. 33.) *è gettato secondo una direzione* AC *orizzontale, od inclinata all' orizzonte, lo spazio da esso descritto è una curva parabolica* APMN.

Sopra la direzione AC della forza, che getta 'l corpo, prendo più parti uguali AD, DE, ec. e siccome questa forza, ch'io chiamo x, è uniforme, così le parti AD, DE, ec. sono gli spazj, che dal corpo sarebbero scorsi in tempi eguali secondo la direzione AC, ed in conseguenza gli spazj AD, AE, AF, ec. sarebbero quei, che'l corpo secondo questa direzione scorrerebbe nel primo tempo, ne' due primi, ne' tre primi, e così a mano a mano: ora la gravità, durante 'l moto giusta la direzione AC, non abbandonando giammai 'l corpo, lo fa discendere verso'l centro della Terra secondo la direzion verticale AL; e però, se supponiamo che nel tempo, in cui la forza x farebbe al corpo scorrere lo spazio AD, la gravità lo facesse discendere d'una quantità uguale ad AG, la stessa gravità nei due primi tempi farà discendere il corpo d'una quantità AH quadrupla di AG,

e nei

e nei tre primi lo farà discendere d'una quantità AL nove volte maggiore di AG, ec. mercè che gli spazj fatti scorrere dalla gravità nel primo tempo, ne' due primi, ne' tre primi, ec. sono fra loro come i quadri di detti tempi, o come i numeri 1. 4. 9. 16, ec.

Ora, perchè il corpo A spinto dal corpo *x* dovrebbe nel primo tempo scorrer lo spazio AD, e perchè in tempo eguale la gravità dee fargli scorrere AG, se si fa'l parallelogrammo AGPD di questi due spazj, il corpo A in fine di questo tempo esser dee in P; perocchè in questo sol punto ei si troverà lungi da AG d' uno spazio GP uguale a AD, e da AD d' uno spazio DP uguale ad AG: similmente, perchè il corpo A spinto da *x* dovrebbe aver' iscorso lo spazio AE in fine de' due primi tempi, e perch'in conseguenza della sua gravità egli dovrebbe avere scorso lo spazio AH in fine de' medesimi, se si fa 'l parallelogrammo AHME, il corpo dee trovarsi al punto M, e per la stessa ragione, in fine dei tre primi egli dee trovarsi all' angolo N del parallelogrammo ALNF, e così successivamente; onde la curva, che passerà per i punti A, P, M, N, ec. sarà la traccia, o'l cammino del corpo durante questo moto, e solo resta a far vedere, che questa curva è una parabola; il che io dimostro in questo modo.

Per la costruzione, le rette GP, HM, LN son parallele, ed uguali ciascuna a ciascuna agli spazj AD, AE, AF, ec. ovvero ai tempi, ne' quali questi spazj sarebbero scorsi secondo la direzione AC: ora l'altezze AG, AH, AL, ec. sono fra se come i quadri di detti tempi; onde quest' altezze sono come i quadrati delle rette GP, HM, LN, ec. cioè nella curva APMN l' assisse AG, AH, AL sono fra loro come i quadri dell' ordinate GP, HM, LN, ec. ed in conseguenza questa curva è una parabola.

129. Se la forza *x*, in vece di spignere il corpo secondo la forza AC, lo spignesse secondo la direzione A*c* opposta ad AC, il corpo descriverebbe un' altra curva parabolica A*n*, che sarebbe la continuazione della precedente AN; perocchè dividendo la direzione A*c* ne' punti *d*, *e*, *f* in parti uguali fra loro, e alle parti AD, DE, EF, ec. della direzione opposta, si proverebbe come sopra: ch' in fine del primo tempo il corpo esser dovrebbe all'angolo *p* del parallelogrammo AG*pd*: ch' in fine de' due primi ei dovrebb' essere all'angolo *m* del parallelogrammo AH*me*, e così degli altri; però la curva, che passerebbe per i punti A*pmn*, sareb-

rebbe la traccia, o'l cammino del corpo durante'l suo moto, e si proverebbe come sopra, essere questa curva una parabola: ora, per la costruzione, le rette *p*G, *m*H, *n*L sarebbero uguali ciascuna a ciascuna alle rette GP, HM, LN, ec. di cui esse sono i prolungamenti; dunque le rette *p*P, *m*M, *n*N sarebbon le doppie ordinate del diametro AL, e conseguentemente A*n* sarebbe la continuazione della curva AN.

130. Dunque la linea AC, od A*c*, secondo la cui direzione una forza spigne un corpo, è tangente della curva AN, od A*n* descritta dal corpo durante'l suo moto; perocchè questa linea è parallela all'ordinate GP, HM, ec. al diametro AL, che passa pel punto A di detta linea.

131. PROPOSIZIONE XIV. *Sia una parabola* AB (Fig. 34.) *descritta dal moto d'un projetto secondo la direzione orizzontale* AR *mediante una forza uniforme, ch'io chiamo* x. *Se da qualsivoglia punto* B, *preso fuori del vertice della parabola, tirasi un'ordinata* BG *all'asse* AC, *indi un diametro* BR, *che seghi la tangente* AR *al vertice in* R, *ed una tangente* BT, *che seghi* AR *in* L, *dico: che se lo stesso corpo è gettato da* B *in* T *secondo la direzione* BT *da un'altra forza uniforme, ch'io chiamerò* z, *e che sia alla forza* x, *come la tangente* BT *alla tangente* AR, *questo corpo durante il suo moto descriverà la parabola* BA *nel tempo stesso da lui impiegato a descriverla, quando era spinto dalla forza* x.

Ora conviene tornarsi alla memoria, che i due triangoli RLB, TLA fatti dalle due tangenti AR, BT, l'uno coll'asse, e l'altro col diametro, son perfettamente simili ed uguali (siccome fu dimostrato nel secondo Libro, parlando delle Sezioni Coniche), e in conseguenza queste due tangenti si segano vicendevolmente in due parti uguali nel punto L: ciò posto.

Divido la tangente AR in parti uguali, p. e. in *6* AD, DH, ec. le quali rappresenteranno gli spazj, che dal corpo spinto colla forza *x* sarebbero scorsi secondo la direzione AR in tempi eguali, e conseguentemente le rette AD, AH, AL, ec. saranno gli spazj, che da questo corpo sarebbero scorsi secondo la stessa direzione nel primo tempo, ne'due primi, ne' tre primi, ec. Abbassando dunque da'punti di divisione delle linee verticali DF, HI, LM, ec. finattanto che seghino la curva ne'punti F, I, M, ec. queste linee dinoteranno le quantità, di cui la gravità avrà abbassato il corpo verso'l centro della Terra nel primo tempo, ne'

ne' due primi, ne'tre primi, ec. e però dette linee, o questi abbassamenti saranno fra loro come i quadrati 1. 4. 9. 16. 25. 36 di questi tempi.

Divido pure l'altra tangente BT in sei parti uguali, e siccome la forza x è alla forza z, come AR è a BT; cioè che la forza x farebbe scorrere AR nel tempo stesso, in cui la forza z farebbe scorrer BT, così è manifesto, che le sei parti uguali della tangente rappresentano gli spazj uguali, che dal corpo sarebbero scorsi secondo la direzione BT in sei tempi uguali ciascuno a ciascuno alli sei, che dal medesimo corpo sarebbero impiegati a scorrere secondo la direzione AR li sei spazj uguali di AR; e che così le rette BS, BA, BL, ec. rappresentano gli spazj, che dal corpo sarebbero scorsi secondo la direzione AT nel primo tempo, ne' due primi, ne' tre primi, ec.

Ora, siccome la gravità in fine del primo tempo secondo la direzione BT non può aver'abbassato il corpo d'una quantità maggiore di quello sarebbe se l' avesse abbassato in fine del primo giusta la direzione AR, nè può eziandio averlo abbassato in fine de'due primi tempi secondo la direzione BT, più di quello l'avrebbe abbassato in fine dei due primi secondo la direzione AR, e così successivamente, perocchè la gravità d' un corpo, essendo sempre la stessa, sempre agisce nel medesimo modo, ne segue; che se dai punti di divisione S, Q, L, Z, Y, T della tangente BT tiransi delle verticali SV, QO, ec. uguali ciascuna a ciascuna alle verticali DF, HI, ec. condotte dai punti di divisione della tangente RA, queste verticali SV, QO, ec. dinoteranno le quantità, di cui la gravità avrà abbassato il corpo spinto secondo la direzione BT in fine del primo tempo, de'due primi, de'tre primi, ec. e s'avverta, che le verticali SV, QO, ec. tirate da'punti della tangente BT son nella direzione delle verticali condotte dai punti della tangente AR; giacchè nel triangolo rettangolo RLB, diviso essendo il lato RL in P ed N nella stessa ragione che'l lato BL lo è ne'punti S, Q, le rette PS, NQ tirate da questi punti son parallele alla verticale RB, e conseguentemente elle sono ancora verticali; donde avviene, che le verticali tirate da' punti P, N, ec. passano per i punti S, Q, ec. per cui passan le verticali condotte da' punti S, Q, ec. e lo stesso si dirà rispetto all'altro triangolo TLA.

Altro non ci resta dunque a far vedere, se non che i termini F, I, M, O, ec. delle verticali DF, HI, ec. condotte dai punti

ti della tangente AR sono altresì i termini delle verticali YF, ZI, ec. tirate da' punti della tangente BT, e che per conseguenza il corpo spinto dalla forza z passa ne' medesimi tempi per gli stessi punti, per cui passerebbe, se spinto fosse dalla forza x; ciò ch' io dimostro in questo modo.

Nel triangolo LTA, parallela essendo la linea YD alla base TA, abbiamo TA. YD : : LT. LY : : 3. 2: ora, poichè la gravità in fine del sesto tempo dee aver' abbassato il corpo spinto secondo la direzione BT d'una quantità uguale a TA, abbiamo TA $=$ 36; dunque 36. YD : : 3. 2, e per conseguenza YD $=$ 24; e ad YD giugnendo la retta DF, ch'è la quantità, di cui la gravità in fine del primo tempo dee abbassare il corpo spinto secondo la direzione DA, avremo YD $+$ DF $=$ YF $=$ 24 $+ 1 =$ 25: ma la gravità in fine de' cinque primi tempi dee aver' abbassato il corpo spinto secondo la direzione BT d' una quantità uguale a 25; onde YF è uguale a questa quantità, e conseguentemente il corpo spinto secondo la direzione BT dee trovarsi in fine del quinto tempo in F, ove troverebbesi in fine del primo, se spinto fosse secondo la direzione AR.

Parimente nel triangolo LTA, noi abbiamo TA. ZH : : LT. LZ : : 3. 1; ora TA $=$ 36; dunque 36. ZH : : 3. 1, e però ZH $=$ 12; e a ZH giugnendo la retta HI uguale a 4, poichè la gravità in fine del secondo tempo avrebbe abbassato il corpo spinto giusta la direzione AR d' una quantità uguale ad essa retta, avremo ZH $+$ HI $=$ ZI $=$ 16: ma la gravità in fine de' quattro primi tempi dee aver' abbassato il corpo spinto secondo la direzione BT d'una quantità uguale a 16; onde il corpo, spinto secondo la direzione BT, in fine del quinto tempo dee trovarsi in I, ove troverebbesi in fine del secondo, se spinto fosse giusta la direzione AR; e così degli altri.

132. *Se dopo 'l sesto tempo il corpo spinto secondo la direzione* BT *continuasse a muoversi, dall' altra banda di* A *egli descriverebbe un' altra semiparabola* Ab, *che sarebbe la continuazione della semiparabola* AB; *e la linea* AC *sarebbe l' asse dell' intera parabola* ABb.

Prolungo BT in t, facendo Tt $=$ TB, e divido Tt in 6 parti uguali fra loro e alle 6 di TB; così 'l corpo spinto secondo la direzione BT dalla forza z sarebbe in y in fine del settimo tempo, in z in fine dell' ottavo, e così successivamente: ma siccome la gravità sempre agisce sopra di lui, così in fine di que-

 sti

ti tempi egli esser dee ne' punti f, i, ec. tal che le verticali yf, zi, ec. sieno fra loro come i quadri di questi tempi, cioè come i quadrati 49, 64, ec.

Prolungo la direzione AR dal lato opposto in r, e chiaramente si scorge, esser' Ar divisa in 6 parti uguali ciascuna a ciascuna alle sei divisioni di AR dalle verticali yf, zi, ec. ciò posto.

Nei triangoli Lyd, LTA noi abbiamo TA . yd : : LT . Ly : : 3 . 4 : ora TA = 36; dunque 36 . yd : : 3 . 4, e però yd = 48: ma yf = yd + df = 49; onde df = 1. Con simile raziocinio, troveremo hi = 4, lm = 9, ec. e perciò lm = LM, no = NO, ec. Quindi tirando le linee Ff, Ii, Mm, ec. esse saran parallele fra loro, e alla direzione RA: donde avviene, che la linea AC perpendicolare ad RA sarà loro perpendicolare, e le segherà tutte per mezzo a motivo del punto A equidistante da D e d, da H ed h, ec. e ch' in conseguenza AC sarà l'asse dell'intera parabola BAb.

133. *Il corpo spinto dalla forza* z *secondo la direzione* BT *in due tempi uguali descrive le due semiparabole* BA, Ab.

Perocchè essendo per la costruzione BT uguale a Tt, la forza uniforme z farebbe scorrere al corpo gli spazj BT, Tt in due tempi eguali: ma in fine del primo il corpo, in vece d' essere in T, trovasi in A, ed ha descritto la semiparabola BA, e in fine del secondo, in vece d'essere in t, trovasi in b, e ha descritto la semiparabola Ab; però queste due semiparabole son descritte in tempi eguali.

134. DIFFINIZIONE. Se gettato un corpo secondo una direzione BT inclinata all' orizzonte dal punto B di projezione tirasi una linea orizzontale Bb, ch' in un' altro punto b seghi la parabola BAb descritta dal corpo durante 'l suo moto, detta linea appellasi l'*Ampiezza* della parabola, e l' asse AC dicesi l'*altezza maggiore del tiro*; così l' asse AC sega l' ampiezza in due parti eguali.

135. PROPOSIZIONE XV. *Data una parabola* AB (Fig. 35.) *ritrovare il suo parametro*.

Quantunque nel secondo libro, parlando delle Sezioni Coniche, io abbia dato più Metodi, onde risolvere questo Problema, tuttavolta eccone un'altro, il quale molto ci gioverà pel tiro delle bombe.

Da qualsivoglia punto B preso sopra la parabola fuori del vertice A conduco l' ordinata BC all' asse AC, indi un diametro BD, che

che ſeghi in D la tangente AD tirata dal vertice A, e finalmente una tangente BT, che ſeghi in R la ſteſſa tangente AD; dal punto R tiro la retta RC all'eſtremità C dell'aſſiſſa AC, ed in R alzo la retta RE perpendicolare ad RC, e ch'in E ſeghi l'aſſe prolungato. Ciò fatto, dico, che la retta AE, compreſa fra'l vertice A della parabola e la retta RE, ſi è'l quarto del parametro cercato; il che io dimoſtro in queſto modo.

Poichè le due tangenti AD, BT ſi ſegano fra l'aſſe e'l diametro BD, noi abbiamo DR = RA: ora DA = BC, a cagione delle parallele AC, DB, e DA, BC; quindi RA = $\frac{1}{2}$BC, e per conſeguente $\overline{RA}^2 = \frac{1}{4}\overline{BC}^2$: ma chiamando p il parametro cercato, per la proprietà della parabola noi abbiamo $\overline{BC}^2 = CA \times p$; dunque $\overline{RA}^2 = \frac{1}{4}\overline{BC}^2 + CA \times \frac{1}{4}p$: ora per la coſtruzione il triangolo ERC eſsendo rettangolo, è diviſo dalla perpendicolare RA tirata dal vertice R ſopra la ſua ipotenuſa in due triangoli ſimili ERA, ARC, e però EA . AR :: AR . AC; onde $\overline{RA}^2 = AC \times EA$: ma $\overline{RA}^2 = AC \times \frac{1}{4}p$; dunque $AC \times \frac{1}{4}p = AC \times EA$, e conſeguentemente EA = $\frac{1}{4}$ P.

136. Quindi ne ſegue 1°. che ſe dopo aver da qualſivoglia punto B tirata l'ordinata BC all'aſſe AC, un diametro BD, che ſegh'in D la retta AD tangente al vertice A, e la tangente BT, che ſeghi la ſteſſa tangente AD in R, ſopra l'aſſe prolungato pigliaſi la parte AE uguale al quarto del parametro dell'aſſe, e che dai punti E, C tirinſi al punto R le rette ER, CR, retto ſarà l'angolo ERC; perocchè, a motivo di RA = $\frac{1}{2}$DA = $\frac{1}{2}$ BC, s'avrà ſempre $\overline{AR}^2 = \frac{1}{4}\overline{BC}^2 = \frac{1}{4}p \times CA$: ma per ipoteſi EA = $\frac{1}{4}p$; dunque $\overline{AR}^2 = EA \times CA$; però nel triangolo ERC la perpendicolare RA ſarà media proporzionale fra i ſegmenti EA, CA della baſe, e per conſeguenza queſto triangolo ſarà rettangolo in R. 2°. ne ſegue, che uguali ſaranno le rette RC, BR, poichè i triangoli rettangoli RDB, RAC ſon perfettamente uguali e ſimili, a motivo di DR = RA, e di DB = AC; il che ci dà BR = RC. 3°. Che ſe ſi prolunga il diametro BD in H, fin che s'abbia BH = CE, e che dal punto H tiriſi la retta HR, il triangolo HBR ſarà uguale e ſimile al triangolo ERC; imper-

 cioc-

ciocchè ne' triangoli simili ed uguali DBR , ACR l' angolo DBR equivale all' angolo ACR: ora, nei triangoli HBR, ERC, i lati HB, BR son uguali ciascuno a ciascuno a' lati EC , CR ; dunque, a cagione dell' angolo compreso HBR uguale all' angolo compreso ECR, il terzo lato HR è uguale al terzo lato RE, e però il triangolo HRB è uguale e simile al triangolo rettangolo ERC . 4°. Che se sopra BH preso per diametro descrivesi un semicircolo HRC, egli segherà per mezzo la tangente DA ; il ch' è evidente, perchè il triangolo HRB è rettangolo . 5°. Che la retta DR compresa nel semicircolo HRB è 'l quarto dell' ampiezza Bb della parabola BAb , che sarebbe descritta da un corpo gettato secondo la direzione BT ; perocchè DR equivale a $\frac{1}{2}$BC , e però anche ad $\frac{1}{4}Bb$.

137. PROPOSIZIONE XVI. *Se un corpo gettato secondo una direzione orizzontale* AD (Fig. 35.) *descrive una parabola* AB, *la velocità , con cui egli è spinto , equivale alla velocità, ch'avrebbe acquistata , cadendo da un' altezza* EA *uguale al quarto del suo parametro.*

Per la precedente Proposizione , cerco la retta EA uguale al quarto del parametro, tirando da un punto B preso sopra la curva un' ordinata BC all' asse , un diametro BD, una tangente BT, ec. ciò posto:

La velocità, cui 'l corpo avrebbe acquistata cadendo dall' altezza EA , è a quella, ch' egli ha acquistata abbassandosi dall' altezza DB, od AC , come la radice quadrata di EA è a quella di AC ; giacchè nel moto uniformemente accelerato , gli spazj scorsi essendo come i quadri delle velocità acquistate in fine di essi spazj, dette velocità sono fra loro come le radici quadre degli spazj: ma a cagione de' triangoli rettangoli simili EAR , RAC, noi abbiamo EA . AR : : AR . AC ; dunque $\overline{EA}^2 . \overline{AR}^2$: : EA . AC, ed in conseguenza EA . AR : : $\sqrt{EA}$. $\sqrt{AC}$; onde la velocità, cui 'l corpo avrebbe acquistata cadendo dall' altezza EA, è a quella, ch' egli ha acquistata abbassandosi dall' altezza AC, come EA ad AR, ed i tempi spesi a scorrer quest' altezze sono pure come EA ad AR, cioè come le velocità acquistate: ora il corpo con una velocità uniforme uguale a quella , ch' avrebbe acquistata cadendo dall' altezza EA, scorrerebbe in un tempo uguale ad EA uno spazio doppio di EA (*N.* 104.) ; dunque colla stessa velocità uniforme ei dee scorrer uno spazio AD doppio

doppio di AR in un tempo uguale ad AR, cioè in un tempo eguale a quello impiegato dalla gravità ad abbassarlo dall' altezza AC, o DB; perocchè nel moto uniforme, gli spazj scorsi da un corpo sono fra loro come i tempi: ma per ipotesi la forza orizzontale, che ha gettato'l corpo, gli avrebbe fatto scorrere AD in un tempo uguale a quello, durante cui la gravità lo ha abbassato dall'altezza AC; però la velocità, impressa da questa forza orizzontale al corpo, equivale a quella, ch'egli avrebbe acquistata, se caduto fosse dall'altezza EA uguale al quarto del suo parametro.

138. PROPOSIZIONE XVII. *Se un corpo* A *gettato secondo una direzione* BT *obbliqua all' orizzonte descrive una parabola* BA*b* *(* Fig. 35. *)*, *la velocità*, *con cui egli è spinto*, *è uguale a quella*, *ch' avrebbe acquistata*, *se fosse caduto da un' altezza uguale al quarto del parametro del diametro* BD, *tirato dal punto* B *di projezione*.

Dal punto B tirisi 'l diametro BD, e l' ordinata BC all'asse AC; dal vertice si tiri la tangente AD, che sega la direzione BT in R; da detto punto R si tiri la retta RC all' estremità C dell'assissa AC, ed alzando in R la retta RE perpendicolare ad RC, si ha EA uguale al quarto del parametro dell'asse (*N.*135.), ed EC uguale al quarto del parametro del diametro BD; poichè il parametro del diametro BD equivale al parametro dell'asse, più quattro volte l'assissa AC, come s'è detto nelle Sezioni Coniche, e conseguentemente il suo quarto è uguale ad AC + AE = EC: così noi dobbiamo far vedere, che la forza, la quale spinge il corpo secondo la direzione BT, li conferisce una velocità uguale a quella, ch' avrebbe acquistata cadendo dall'altezza EC; il che io faccio in questo modo.

Se 'l corpo spinto da una forza *x* colla direzione orizzontale AR descrivesse la semiparabola AB in un tempo uguale a quello, ch'egli spende a descriverla, quando è spinto dalla forza *z* colla direzione obbliqua BT, *x* sarebbe a *z*, come la tangente AD è alla tangente BT; essendosi dimostrato (*N.* 131.), che due forze, le quali sieno fra loro come dette tangenti, fanno scorrere la stessa semiparabola AB in tempi uguali; onde noi avremmo *x*. *z* : : AD. BT : : AR. BR : : AR. CR (*N.*136.): ma i triangoli simili ARC, ERC ci danno AR. CR : : ER. EC; dunque *x*. *z* : : ER. EC: ora, a cagione de' triangoli simili EAR, ECR, noi abbiamo EA. ER : : ER. EC; il che ci

ci dà $\overrightarrow{ER}$. $\overrightarrow{EC}$: : EA . EC, ed ER . EC : : $\sqrt{EA}$. $\overrightarrow{\sqrt{EC}}$; però x . z : : $\sqrt{EA}$. $\sqrt{EC}$, cioè come la velocità, che 'l corpo acquiſterebbe cadendo dall' altezza EA, è alla velocità, ch'ei acquiſterebbe cadendo dall'altezza EC. Ma le forze uniformi x, z, eſſendo fra loro come le quantità di moto, o come i prodotti delle maſſe per le velocità, ſono in conſeguenza fra ſe come le lor velocità, poichè la maſſa è la medeſima; onde la velocità, che x conferirebbe al corpo, è a quella, che z gl' imprime, come $\sqrt{EA}$ a $\sqrt{EC}$: ora $\sqrt{EA}$ è la velocità, che x imprimerebbe al corpo (*N.* 137.); dunque $\sqrt{EC}$ è la velocità, che z gl'imprime.

139. PROBLEMA. *Dato l' angolo d' inclinazione* TBC (Fig. 35.), *ſotto cui un corpo è gettato, e l'ampiezza* Bb *della parabola da eſſo deſcritta, conoſcer l' altezza maggiore del tiro, e deſcriverne la parabola.*

Sego l'ampiezza B*b* in due parti eguali in C, alzo in C la retta CT perpendicolare a B*b*, e la prolungo, fin che ſegh' in T la direzione BT. Sego per mezzo in A la retta TC, e la retta AC metà di TC è l'altezza maggiore del tiro, cioè l' aſſe della parabola compreſo fra'l vertice, e l'ampiezza B*b*. Cercando dunque una terza proporzionale all'aſſe AC, e all'ordinata, o ſemiampiezza BC, detta terza proporzionale ſarà il parametro, e conſeguentemente agevol ſia deſcrivere la parabola ricercata. Ciò è per ſe evidente 1°. perchè l'aſſe, o l'altezza maggiore del tiro dee ſegar perpendicolarmente e per mezzo l'ampiezza B*b* (*N.*134), come s'è fatto. 2°. perchè la direzione BT eſſer dee tangente nel punto B della parabola deſcrita dal corpo (*N.* 132.): il che in fatti ſuccede, perocch' eſſendo ſtata la retta TC ſegata per mezzo in A, la retta BT è neceſſariamente tangente in B; onde BA*b* è la parabola deſcritta dal corpo gettato ſecondo la direzione BT.

140. PROBLEMA. *Data la parabola* AHC (Fig. 36.), *deſcritta da un corpo gettato ſotto un' angolo d' inclinazione* DAC *da qualſiſia forza, conoſcer la parabola, ch' ei deſcriverebbe, ſe gettato foſſe dalla ſteſſa forza ſotto un' altro angolo d' inclinazione* EAC.

Per lo precedente Problema io cerco l'altezza maggiore del tiro, o l'aſſe SH; dal vertice H conduco la tangente HL, che ſega in L il diametro AL, e in T la direzione, o tangente AD; cerco 'l quarto del parametro dell' aſſe (*N.* 135.), e prolungando AL, faccio LB uguale al quarto di eſſo parametro. Così AB, eſ-

ſendo

fendo uguale all' assissa SH, più 'l quarto del parametro dell asse, è in conseguenza uguale al quarto del parametro del diametro AL. Perciò, sopra AB preso per diametro, descrivendo un semicircolo BMA, ei passa pel punto T, in cui le tangenti AL, HT si segano (*N.* 136.).

Dal punto M, in cui la direzione EA sega 'l circolo, tiro NR parallela ad LH, od AC; faccio la parte esteriore MR uguale all'interna NM; da R abbasso RP perpendicolare ad AC, e pigliando RP per l'asse d' una parabola, ed AP per l' una delle sue ordinate, descrivo ARX, che sarà la parabola, cui descriver dee il corpo, quando sarà gettato colla direzione EA dalla stessa forza, che l'ha gettato colla direzione DA; il che io così dimostro.

Dal punto M conduco la retta MP, ed alzando in M la retta MZ perpendicolare ad MP, la retta ZR sarà 'l quarto del parametro dell'asse RP, e ZP il quarto del parametro del diametro AB, che passa pel punto A. Ma, a cagione di NM uguale per la costruzione ad MR, e delle parallele uguali NA, RP, i triangoli rettangoli NMA, MRF son perfettamente uguali; onde, s'io tiro la retta BM, la quale sarà perpendicolare ad AM mercè che l' angolo AMN alla circonferenza abbraccia 'l diametro, i triangoli rettangoli AMB, PMZ saran simili ed uguali, a motivo di AM = MP, e dell'angolo acuto MAN uguale all' angolo acuto MPR; dunque BA = ZP. Così, se 'l corpo spinto colla direzione AM descrivesse la parabola ARX, la forza, che lo spigneria, gl'imprimerebbe una velocità uguale a quella, ch' avrebbe acquistata cadendo dall' altezza ZP, o BA (*N.* 138.): ora, quando 'l corpo spinto secondo la direzione AD ha descritto la parabola AHC, la forza, che lo spigneva, gli ha conferito una velocità uguale a quella, ch' avrebbe acquistata cadendo dalla medesima altezza BA, ch' è altresì 'l quarto del parametro AL rispetto a detta parabola; onde la velocità, cui 'l corpo avrebbe ricevuta sotto la direzione AM, se scorso avesse la parabola ARX, è uguale a quella ricevuta sotto la direzione AD: ma le forze, ch' imprimono queste velocità, essendo fra se come le lor quantità di moto, o come i prodotti delle masse per le velocità, sono in conseguenza fra loro come le velocità, poichè quì la massa è la medesima; dunque 'l corpo, il quale descrive la parabola AHC, è spinto colla stessa forza, che lo farebbe, se descrivesse la parabola ARX.

141. Siccome tutte le direzioni obblique sopra AX, con cui

la

la stessa forza può gettare il corpo, segan necessariamente il semicircolo BMA, così ne segue, che mediante questo semicircolo ritrovar si possono tutte le parabole, che 'l corpo spinto da detta forza può descrivere sotto differenti inclinazioni.

142. *In tutte le parabole, ch'un corpo spinto da una stessa forza può descrivere, i parametri degli assi son disuguali.*

Poichè, essendo LB il quarto del parametro dell'asse della parabola AHC, NB sarà 'l quarto del parametro dell'asse della parabola ARX, ed in conseguenza disuguali essendo questi due quarti, egli lo son pure i parametri.

143. *In tutte le parabole, ch'un corpo spinto da una stessa forza può descrivere sotto differenti inclinazioni, l'ampiezze delle parabole sono fra loro come i seni degli angoli doppj degli angoli d'inclinazione.*

La retta LT è 'l quarto dell'ampiezza AG della parabola AHC (*N.* 136.), e perciò anche la retta NM è 'l quarto dell' ampiezza della parabola ARX; e siccome l'ampiezze son nella stessa ragione de'loro quarti, così e' non si tratta di far vedere se non che le rette LT, NM sono i seni degli angoli doppj degli angoli d'inclinazione LAC, EAC. Il che io faccio in questo modo.

Dal centro O del semicircolo BMA tiro i raggi OT, OM ai punti T, M, in cui le direzioni TA, MA segano 'l semicircolo. L'angolo al centro TOA è doppio dell'angolo d'inclinazione TAC, ch'è l'angolo del segmento TA: parimente, l'angolo al centro MOA è doppio dell'angolo d'inclinazione MAC, ch'è l'angolo del segmento MA: ora LT è 'l seno dell'angolo TOA, ed MN il seno dell'angolo MOA; dunque l'ampiezze CA, XA, che sono fra se come i lor quarti LT, NM, sono anche fra loro come i seni degli angoli doppj degli angoli d'inclinazione LAC, EAC.

144. *In tutte le parabole, ch'un corpo spinto da una stessa forza può descrivere sotto differenti inclinazioni, l'altezze maggiori de' tiri sono fra loro come i seni versi degli angoli doppj degli angoli d'inclinazione.*

Nella parabola AHC, l'altezza maggiore HS è uguale ad AL, e nella parabola ARX l'altezza maggiore RP è uguale ad AN: ora AL è 'l seno verso dell'angolo TOA doppio dell'angolo d'inclinazione TAC, ed AN il seno verso dell'angolo MOA doppio dell' angolo d'inclinazione MAC; onde l'altezze maggiori HS, RP di queste due parabole sono fra loro come i seni versi degli angoli doppj degli angoli d'inclinazione.

Si

Si può anche dire, che *l'altezze maggiori de' tiri* HS, RP, ec. *sono fra se come i quadrati dei seni degli angoli d'inclinazione.*

Perocchè, a motivo de' triangoli rettangoli simili NAM, BAM, abbiamo NA . AM : : AM . AB ; quindi $\overline{AM}^2$ = NA × AB. Parimente, se dal punto T noi tirassimo una retta al punto B, avremmo due altri triangoli rettangoli simili LAT, BAT, che ci darebbero LA . AT : : AT . AB, e però $\overline{AT}^2$ = LA × AB ; dunque $\overline{AT}^2$. $\overline{AM}^2$: : LA × AB . NA × AB ; e dividendo i termini dell'ultima ragione, avremmo $\overline{AT}^2$. $\overline{AM}^2$: : AL . AN. Ora la metà della corda AT è 'l seno della metà dell'angolo TOA, cioè 'l seno dell'angolo d'inclinazione TAC, e la metà della corda AM è 'l seno della metà dell'angolo MOA, cioè 'l seno dell'angolo d'inclinazione MAC: ma questi seni, o queste semicorde essendo fra loro come le corde, i lor quadrati son pure come i quadri delle corde ; onde, perchè abbiamo AL . AN : : $\overline{AT}^2$. $\overline{AM}^2$, avremo ancora AL ad AN, come il quadro del seno dell' angolo d'inclinazione TAC al quadrato del seno dell'angolo d'inclinazione MAC: ma AL = HS, ed AN = RP ; però l'altezze maggiori HS, RP sono fra loro come i quadrati de' seni degli angoli d'inclinazione.

145. *In tutte le parabole, ch'un corpo spinto da una medesima forza può descrivere sotto differenti direzioni, gli spazj, che da questo corpo sarebbero scorsi sopra le sue direzioni, se la gravità non l'abbassasse, sono fra loro come i seni degli angoli d'inclinazione.*

Dal termine C dell' ampiezza AC alzo sopra AC la perpendicolare CV, fin che segh'in V la direzione AV ; e la retta AV denota lo spazio, che 'l corpo avrebbe scorso sopra la sua direzione AV in un tempo uguale a quello da esso impiegato a scorrere la parabola AHC, per i principj sopra stabiliti (*N.* 128. 131.): per la stessa ragione, all'estremità X dell' ampiezza AX innalzando la perpendicolare XY, che sega la direzione AY, la retta AY denota lo spazio, che 'l corpo scorrerebbe sopra questa direzione in un tempo uguale a quello, ch'esso impiegherebbe a scorrer la parabola ARX. Da' punti T, M, in cui le direzioni AV, AY segano il semicircolo BMTA, s'abbassi sopra l' orizzontale AX le perpendicolari TG, MK, e a cagione de' triangoli simili ATG, AVC

s'avrà AG . AC : : AT . AV: ma AG è'l quarto di AG; dunque AT =, $\frac{1}{4}$AV. Parimente, a motivo de' triangoli simili AMK, AVX, abbiamo AK . AX : : AM . AY: ma AK = $\frac{1}{4}$AX; quindi AM = $\frac{1}{4}$AY: così le corde AT, AM del semicircolo sono i quarti delle direzioni totali AV, AY; e conseguentemente queste direzioni sono fra se come le corde AT, AM, o come le metà di dette corde: ora le metà delle corde sono i seni degli angoli d' inclinazione, come s'è veduto (*N.* 144.); onde gli spazj AV, AY, che dal corpo sarebbero scorsi sopra le sue direzioni, se'l peso non l' abbassasse, sono fra loro come i seni degli angoli d'inclinazione.

146. *In tutte le parabole, ch' un corpo spinto da una medesima forza può descrivere sotto differenti direzioni, i tempi, ne' quali queste parabole son descritte, sono fra loro come i seni degli angoli d' inclinazione.*

Poichè'l corpo avrebbe scorso la retta AV sopra la direzione AV in un tempo uguale a quello da esso impiegato a descrivere la parabola AHC, la verticale VC è l'altezza, di cui la gravità ha abbassato questo corpo nel medesimo tempo; e per la stessa ragione la verticale YX è l'altezza, di cui la gravità abbasserebbe il corpo, quando descrivesse la parabola ARX. Ora, a motivo de' triangoli simili ATG, AVC, noi abbiamo AG. AC : : TG. VC; onde, a cagione di AG = $\frac{1}{4}$AC, abbiamo TG = $\frac{1}{4}$VC. Parimente, ne' triangoli simili AMK, AYX, AK. AX : : MK. YX; dunque, a motivo di AK = $\frac{1}{4}$AX, abbiamo MK = $\frac{1}{4}$YX, e per conseguenza VC. YX : : TG. MK: ora TG = AL, ed MK = AN; però VC. VX : : AL . AN, cioè le verticali VC, YX sono fra se come i seni versi AL, AN degli angoli doppj degli angoli d' inclinazione: ma questi seni sono fra loro come i quadrati de' seni degli angoli d' inclinazione (*N.* 144.); dunque le verticali VC, YX sono fra se come i quadri de' seni degli angoli d'inclinazione, o come $\frac{1}{4}\overline{AT}^2$, $\frac{1}{4}\overline{AM}^2$ (*N.* 145.): ora 'l tempo impiegato dalla gravità ad abbassare il corpo d' una quantità eguale ad VC è al tempo, ch' essa impiegherebbe ad abbassarlo d' una quantità eguale ad YX, come la radice quadra di VC è alla radice quadrata d' YX; onde questi tempi sono fra loro come le radici quadrate di $\frac{1}{4}\overline{AT}^2$, $\frac{1}{4}\overline{AM}^2$, cioè come $\frac{1}{2}$AT, $\frac{1}{2}$AM, o come i seni degli angoli d'inclinazione (*N.* 145.). Quindi n'avviene, che i tempi impiegati a scor-

scorrere le parabole AHC, ARX, ec. sono fra essi come le metà delle corde AT, AM, ec. o come gli ottavi delle direzioni totali, ed in conseguenza come dette direzioni.

147. *Fra tutte le parabole, che da un corpo spinto da una stessa forza con differenti direzioni si possono descrivere, quella descritta sotto un' angolo di 45 gradi ha un' ampiezza maggiore, e quelle descritte sotto angoli equidistanti da 45 gradi son' uguali* (Fig. 37.).

Quando 'l corpo è gettato sotto un' angolo di 45 gradi, la perpendicolare MO abbassata sul diametro BA dal punto M, in cui la direzione AM sega 'l circolo, è 'l quarto dell' ampiezza della parabola, e nel medesimo tempo anche il seno dell' angolo di 90 gradi doppio dell' angolo d' inclinazione MAC: ora 'l seno di 90 gradi è 'l massimo di tutt' i seni; dunque, perchè l'ampiezze sono come i seni degli angoli doppj degli angoli d' inclinazione, l' ampiezza sotto 45 gradi è maggiore dell' ampiezza sotto qualunque altro angolo; poichè il seno del doppio di quest' angolo sarà sempre minore del raggio, o seno di 90 gradi.

Ora si prendano gli angoli TAC, VAC equidistanti da 45 gradi; l'uno, per esempio, di 15, e l' altro di 75 gradi: il doppio del primo sarà di 30 gradi, e quello del secondo di 150; ed in conseguenza, essendo questo il compimento a due retti dell' angolo di 30 gradi, il suo seno VH sarà uguale al seno TL dell' angolo di 30: ora i seni VH, LT sono i quarti dell' ampiezze sotto gli angoli VAC, TAC; dunque l' ampiezze sotto gli angoli equidistanti da 45 gradi son' uguali.

148. *Se la forza, che getta 'l corpo, non si cangia, l' ampiezza sotto 45 gradi è doppia dell' ampiezza sotto 15.*

L' angolo doppio di 45 gradi essendo di gradi 90, il suo seno equivale al raggio. Parimente, l' angolo doppio di 15 gradi è di 30, e 'l seno di 30 gradi è la metà della corda, che sostiene l' arco di 60 doppio di quello di 30, e per conseguenza il seno di 30 gradi è la metà del raggio: ora l' ampiezza sotto 45 è all' ampiezza sotto 15, come il seno di 90 gradi è al seno di 30; dunque quest' ampiezze sono fra loro, come il raggio è alla metà del raggio, o come 2 ad 1.

149. *L' ampiezza maggiore* AX *d' una forza* (Fig. 37.) *è doppia del quarto del parametro del diametro, che passa pel punto* A *di projezione.*

Essendo l' ampiezza maggiore sotto l' angolo di 45 gradi MAX, se prolungo la direzione AM, fin che seghi l' asse prolungato in P,

il triangolo AZP sarà rettangolo ed isoscele, e quindi AZ $=$ ZP $=$ 2ZN: ma il raggio AO è allora uguale a ZN; dunque AB $=$ 2AO $=$ 2ZN, e per conseguente AB $=$ ZP $=$ AZ: ora AZ è la metà dell'ampiezza; onde AB, o'l quarto del parametro del diametro, che passa per A, è uguale alla metà dell'ampiezza. Però tutta l'ampiezza AX equivale a due quarti, o alla metà di detto parametro; ed in conseguenza ella è'l doppio del quarto di esso parametro.

150. PROBLEMA. *Costruire una tavola, la quale contenga tutte l'ampiezze delle differenti parabole, che si possono descrivere da una Bomba gettata con una stessa forza di polvere, o con un'istessa carica della medesima polvere.*

Facciasi una sperienza, cioè tirisi una Bomba colla data carica sotto un'angolo ad arbitrio; indi misurisi esattamente l'ampiezza, o la distanza dal Mortajo al sito, in cui è caduta la Bomba; e poi, per trovare l'ampiezza sotto un'altro angolo, cerchisi nella Tavola de'seni il seno doppio di quello, sotto cui s'è fatta la prova, e'l seno doppio di quello, sotto cui si cerca l'ampiezza; poscia dicasi per la Regola del Tre: siccome il seno doppio dell'angolo, sotto cui s'è tirato, è al seno doppio di quello, sotto cui si cerca l'ampiezza, così l'ampiezza della parabola descritta sotto 'l primo angolo è ad un quarto termine, che sarà l'ampiezza della parabola, la quale sarebbe descritta nel secondo angolo; e lo stesso facendo rispetto a tutti gli altri angoli, sotto cui colla medesima carica si può tirare la stessa Bomba, s'avran tutte l'ampiezze richieste. Quindi in una colonna si scriveranno tutt'i gradi, sotto cui si può tirare, cioè dall'1. fino al 90, e accanto ad essi l'ampiezze corrispondenti, e la Tavola sarà costruita: Ciò è evidente, perocchè l'ampiezze sono fra loro come i seni degli angoli doppj degli angoli d'inclinazione.

151. Costruita in tal modo questa Tavola, si può col di lei mezzo e senza ricorrere ai seni trovar l'ampiezze delle differenti parabole, che si potrebbero con un'altra carica dalla stessa Bomba descrivere. Supponiamo, per esempio, che la Bomba spinta colla prima carica, ch'io chiamo a, abbia avuto sotto un'angolo $= b$ un'ampiezza $= m$, e sotto un'angolo $= c$ un'ampiezza $= n$; e che si cerchi, quali ampiezze ella avrebbe sotto gli stessi angoli, se fosse tirata con un'altra carica $= f$: si tirerà la Bomba colla carica f sotto un'angolo $= b$, e misurando esattamente il suo tiro, o l'ampiezza, si dirà per la Regola del Tre: l'ampiezza

piezza *m* della forza *a* sotto l'angolo *b* è all' ampiezza *n* della stessa forza sotto l'angolo *c*, come l'ampiezza trovata della forza *f* sotto l'angolo *b* è ad un quarto termine, il quale sarà l'ampiezza, che la medesima forza *f* darebbe sotto l'angolo *c*; il ch' è altresì evidente, perocchè gli angoli dell' ampiezze della forza *a*, e quelli dell'ampiezze della forza *f* sono gli stessi, e perchè l' ampiezze d'amendue le forze sono come i seni degli angoli doppj degli angoli *b*, e *c*.

152. **PROBLEMA**. *Costruire una Tavola per ritrovare subito quali sieno gli angoli corrispondenti a tutte l'ampiezze possibili d'una stessa forza.*

Tirisi una Bomba colla data carica sotto un'angolo di 45, o 15 gradi: se tirasi sotto 45, la distanza dal Mortajo al sito, ove caderà la Bomba, sarà l'ampiezza maggiore (*N.* 147.); e se tirasi sotto 15 gradi, s'avrà solo a raddoppiare questa distanza a fine d'avere l'ampiezza maggiore (*N.* 148.); dopo di che, se vogliamo tirare per avere un' ampiezza minore della più grande, diremo per la Regola del Tre: l'ampiezza maggiore è a quella, che si cerca, come il seno dell'angolo doppio di 45 gradi, cioè'l raggio è ad un quarto termine, che sarà il seno dell'angolo doppio di quello, sotto cui si dovrebbe tirare, a fine d' aver l' ampiezza richiesta. Però cercando nelle Tavole de' Seni a qual'angolo appartenga detto seno, la metà di quest'angolo sarà quello, che darebbe l' ampiezza ricercata, e così ec. Ritrovati dunque i gradi corrispondenti a tutte l'ampiezze, che sono inferiori alla più grande, si scriveranno in una colonna tutte l' ampiezze, cominciando dalla minore e andando fino alla massima, e dirimpetto a ciascuna d'esse in un'altra colonna si scriveran li gradi, i quali s'avrà trovato lor corrispondere.

153. Se si facesse il tiro di prova sotto un'angolo differente da quelli di 45, o 15 gradi, a fine d'avere l'ampiezza maggiore, dovrebbesi fare un calcolo, come s' è detto sopra (*N.* 150.), là dove tirando sotto 45, o 15 gradi l'ampiezza maggiore trovasi più facilmente; e quindi io ho detto, che doveasi fare il tiro di prova sotto l'uno, o l'altro di questi due angoli.

154. M^r. Blondel, dopo avere nel suo primo Libro dell' *Arte di tirar le Bombe* riferito ciò, che altri avean detto prima di lui su tal soggetto, ci fa osservare, che la maggior parte degli Autori, i quali hanno scritto d'Artiglieria, si sono ingannati rispetto ai tiri d'una stessa forza, che convengono a' differenti angoli d' in-

inclinazione, perchè non bene conobbero le regole del moto di projezione. Ora, privi di questo soccorso, essi credettero di poter'a ciò riparare rivolgendosi alle prove; ma non essendo queste condotte da quella fina Teorica, ch' insegna a rimuoverne le circostanze e gli strani accidenti, in vece d'esser loro utili, gli hanno precipitati nell'errore, ed han fatto loro concepire de' sistemi molto lontani dal vero. Il mirabile si è, che Mr. de Saint-Remi, il quale avea letto la giudiziosa Critica fatta da Mr. Blondel alle Tavole de' Bombardieri, ce n'abbia ciò non ostante riferite alcune nelle sue Memorie d' Artiglieria, tali, quali furon da esso trovate nell' Opera del detto Autore, e ch' in oltre abbia preteso di giustificarle colla frivola ragione, che la sperienza, spezialmente in materia di polvere, dee prevalere alle più dotte osservazioni. Per buona sorte gli sperimenti han disingannato anche i Bombardieri de' nostri giorni, e se mal non m' avviso, pochi saran quelli, i quali al dì d' oggi nell' Esercizio dell' Arte loro ricorrer vogliano a ciò, che gli antichi loro Confratelli hanno su di ciò stabilito. Nel resto io non ho riguardo di confondere colle Tavole, che gli antichi Autori ci han lasciato ne' loro Scritti, quelle che trovansi nel Bombardier Francese, e nella Teorica sul Meccanismo dell' Artiglieria di Mr. *Dulacq* Capitano d' Artiglieria del RE di Sardegna; imperocchè queste, essendo state formate su i principj di Galileo, i quali furon' approvati da tutt' i Dotti, sono esenti da qualunque sospetto, e non possono essere se non se utili, posto che sieno senza errori di stampa e di calcolo, cosa che di raro accade in Opere di tal natura.

Molti restaron disgustati delle regole insegnateci dalla Teorica, perchè non sempre in pratica elle trovansi perfettamente giuste: tutta volta doveano questi tali riflettere, non risultare ciò dal fondo di queste regole, ma unicamente dalle circostanze e dal gran numero d'accidenti inseparabili dalla pratica. Questi tali accidenti sono 1°. La resistenza, e l'agitazione dell'aria: a motivo della sua resistenza, la qual'è maggiore, o minor secondo che l' aria è più, o meno compressa, i tiri ne vengon più, o meno diminuiti; e a motivo della sua agitazione, che varia pure ad ogni istante, le direzioni ne sono alterate. 2°. Le particole eterogenee della polvere: le tre materie che la compongono, per diligenza che s' usi, non si confondono mai uniformemente; i grani non sono tutti d'egual grossezza; l' aria compresa ne' suoi pori ed inter-

interstizj è ora più, ora meno compressa, siccome l'aria, che si respira; ed in conseguenza l'infiammazioni non si fanno dovunque egualmente, nè sempre colla stessa prontezza, e i tiri ne soffrono qualche alterazione. 3°. La differenza di peso e di diametro nelle Bombe, sebben fatte per uno stesso Mortajo; perocchè, non mantenendosi sempre il medesimo grado di calore, mentre si cola la materia, il grano diventa più, o men fino, e quindi nasce la maggiore, o minor gravità; in oltre, tutte le parti della materia non hanno dovunque, o almeno di rado la stessa densità: così 'l centro di gravità non è 'l medesimo che 'l centro della figura. Dall'altro canto le Bombe non partono se non con molta difficoltà secondo la direzione dell'asse del pezzo, o perchè, non essendo il fuoco portato direttamente nel centro della camera, il forte dell'infiammazione non è sempre in detto centro, o perchè le Bombe, avendo del vento, non si possono ripor nel Mortajo, in modo che l'asse del pezzo passi pel loro centro di gravità; donde avviene, che la Bomba, partendo, batte in alcuno de' lati del Mortajo, il che fa ad essa cangiar la direzione, che se le volea dare. 4°. Finalmente, le negligenze, che commetter si possono, non prendendo esattamente l'angolo, sotto di cui si vuol tirare; non bene assicurando il pezzo nella determinata direzione dell' angolo; non sempre egualmente ricalcando la polvere, o non osservando, se 'l pezzo inclini più dall' uno che dall' altro lato. Ora tutti questi accidenti, combinandosi insieme in differenti modi, possono nei tiri produrre infinite varietà, a cui non è sempre egualmente facile di rimediarvi.

Quando dunque ciò sia, qual vantaggio, mi si dirà, è mai quello, che può trarsi da una sì bella, e cotanto esaltata Teorica? La risposta non è difficile. Un' Uffiziale, il quale giugne la Teorica alla Pratica (necessaria cosa essendo e l' una e l' altra per non imbrogliarsi nell' operazioni), un tal' uffiziale, io replico, dopo aver fatto il suo tiro di prova sa subito cosa avverebbe, se gli accidenti, di cui s' è fatto menzione, non facessero nascer disordini; ei parte dunque da un punto fisso, e ciò è molto in una materia, ove la pratica più consumata non trova che incertezza. Ora, siccome egli sa, che l'aria resiste, e che la sua resistenza è tanto maggiore, quanto le projezioni son di più lunga durata, così ei ben s'avvede, che nelle projezioni, le quali sono al di sotto dell'angolo di 45 gradi, quelle, che più s'accostano a quest'angolo, soffrir debbo-

no

no maggiori diminuzioni, e che quando le projezioni sono equidistanti da 45 gradi, i tiri di quelle, che sono al di sopra, esser debbono un pò men lunghi di quelli, i quali sono al di sotto; nulladimeno facendosi le nostre projezioni con molta velocità, nè molto grandi essendo la loro altezza ed ampiezza, n'inferisce, che la differenza dei tiri a quelli, che li dà la Teorica, dee sempre aver dei limiti assai ristretti, e sa ancora in conseguenza a cosa appigliarsi, caso che se gli affacci questa tal difficoltà. Che se i disordini son più considerabili di quello egli abbia stimato essere, allora sapendo l' Ufficiale, ciò non poter derivare se non dagli altri accidenti, i quali niente hanno di comune colla resistenza dell'aria, subito rivolge il suo pensiero ad osservare, che l' operazione sia fatta con tutta l'esattezza necessaria; e così, s'ei non giugne alla precisione geometrica, almeno tanto se n' avvicina, da poterne sortire il desiato effetto: e ciò è quanto si può da esso pretendere, non trattandosi di far cadere una Bomba sulla punta d'un'ago, ma sopra un segno, o termine, il qual'è sempre di qualch'estensione.

Ora lasciamo operare ad un'Ufficiale, il quale non sia guidato che dalla pratica: certo ch'un sol tiro di prova non li darà la cognizione dei tiri sotto i differenti angoli; e però converrà, che tanti ne faccia, quanti sono gli angoli, sotto cui si può tirare, e necessariamente abbrucoierà indarno non poca polvere: Ma fatte queste prove, cosa potrà egli quindi dedurne? i tiri da esso trovati saranno forse i veri? No. Altrimenti converrebbe, che non vi si fosse interposto alcun'accidente, il ch'è impossibile: che s'ei tende unicamente a voler giugnere al termine, sotto quanti angoli e con quante differenti cariche non dovrà egli tirare prima d'effettuarne il disegno? e poi chi l'assicurerà, che la carica, con cui ha tirato, sia la meno dispendiosa, e che non si possa tirar con minor polvere, e giugnere al segno sotto un' angolo differente? Ma lasciamo ciò da parte, ed esaminiam soltanto cosa ei farebbe, se i tiri, che facesse di nuovo, fossero diversi dai primi. Egli senza dubbio cangerà subito il suo angolo, alzerà ed abbasserà il Mortajo, accrescerà e diminuirà la polvere, userà diligenze laboriose, e finalmente tormenterà per lo più se stesso, e gli altri senza frutto. Si disingannino adunque, e confessino una volta questi tali, che la Teorica, e spezialmente la Geometria e la Fisica sono in questo più necessarie di quello si crede; che se alcuni han preteso, niente potersi su tal materia determi-

terminare, ciò fu, perchè non vollero assoggettarsi a studiare certi principj, i quali ad essi parvero troppo astratti, e perchè non avendo potuto risolvere la lor difficoltà nella cieca pratica, su cui si sono troppo fondati, han falsamente pensato, che 'l caso esser dovesse l'unica regola delle projezioni.

155. PROBLEMA. *Trovare il circolo, che rinchiuda tutte l'ampiezze d'una stessa forza di polvare sotto differenti angoli, senza che sia necessario di cercare l'altezza maggiore del tiro di prova, nè il parametro dell'asse della parabola fatta dallo stesso tiro di prova descrivere alla Bomba* (Fig. 38.).

Sia AB l'ampiezza dataci dal tiro di prova. Primieramente io alzo in A la retta indefinita AS perpendicolare ad AB; poscia nello stesso punto faccio un'angolo PAD uguale all'angolo, sotto cui ho fatto il tiro di prova; quindi io sego l'ampiezza AB in quattro parti uguali, e al termine E del suo primo quarto AE alzo una perpendicolare ER, che segh'in R la direzione AP; finalmente in R io alzo sopra AR la perpendicolare RS, che sega in S l'indefinita AS, e sopra AS presa per diametro descrivo il semicircolo ricercato SRA, cioè 'l semicircolo, per cui io posso conoscere tutte l'ampiezze della stessa carica sotto differenti angoli; il che io provo in questo modo.

Dal mezzo D dell'ampiezza io alzo la perpendicolare DT, che segh'in P la direzione AP; dal punto R tiro NH parallela ad AD, e la retta RD; sopra RD io alzo la perpendicolare RT; e finalmente, prendendo HD per asse, e AD per ordinata, descrivo la parabola AHB, ch'è la stessa di quella descritta dalla Bomba, quando ho fatto il tiro di prova, perocchè i triangoli simili RNA, PRH son perfettamente uguali, a cagione di NR $=$ RH, e però PH $=$ NA $=$ HD: così la direzione AP è tangente di questa parabola, come dee essere. Ora egli non è possibile di descrivere due differenti parabole, le quali abbiano la stessa ampiezza AB e la stessa tangente AD al medesimo punto; onde la parabola AHD è quella descritta dalla Bomba.

Ora, a motivo di RT perpendicolare ad RD, la retta TH è'l quarto del parametro dell'asse (*N.*135.), e TD è'l quarto del parametro del diametro, che passa pel punto A, e a motivo de'triangoli simili ed uguali SRA, TRD abbiamo SA $=$ TD; però SA è'l quarto del parametro del diametro, che passa pel punto A: ma il semicircolo BMA è precisamente lo stesso di quello descritto sopra (*N.* 140.); poichè il suo diametro AS è'l quarto del parametro del diametro, che passa pel punto A della parabola

descritta dal tiro di prova sotto l'angolo PAD, dove abbiam pure dimostrato, servire detto circolo per trovare l'ampiezze della stessa forza di polvere sotto differenti angoli; dunque, ec.

156. Conviene osservare, che questo semicircolo comprende tutt' i quarti d'ampiezza sotto differenti angoli: per esempio, quando la Bomba tirata sotto l'angolo DAC (*Fig. 36.*) descrive la parabola AHC, la retta LT è 'l quarto dell' ampiezza AC, e quando la stessa Bomba sotto l'angolo MAX descrive la parabola ARX, la retta NM è 'l quarto della sua ampiezza AZ; e così dell'altre.

157. PROBLEMA. *Trovar le differenti ampiezze d'una stessa forza di polvere sotto differenti angoli, e gli angoli, che convengono a differenti ampiezze proposte, senza che sia d'uopo ricorrer' alle Tavole.*

Sopra una carta formo una scala, ch' io divido in duemila parti, le quali rappresenteranno delle pertiche: ho scelto il numero di duemilla, perocch' egli è la più grande ampiezza d' una Bomba tirata sotto l' angolo di 45 gradi colla carica maggiore. Costruita questa scala, faccio un tiro di prova sotto qualsivoglia angolo, e dopo aver' esattamente misurato il suo tiro, sopra una carta io conduco una retta indefinita AZ (*Fig.39.*); quindi sulla scala prendo col compasso una grandezza uguale al quarto del tiro da me trovato, e la porto sopra AZ da A in B. Faccio in A un' angolo MAZ uguale all'angolo, sotto cui ho fatto il tiro di prova; sopra i punti A e B alzo due perpendicolari AC, BR; dal punto R, in cui BR sega la direzione AM, io alzo RG perpendicolare ad AR, e finalmente intorno ad AC presa per diametro descrivo il semicircolo CRA, che comprende tutt' i quarti d'ampiezza sotto differenti angoli della carica, con cui io ho fatto il tiro di prova (*N.* 155.).

Ora, s'io voglio sapere quale sarà l' ampiezza sotto un' altro angolo, formo in A un' angolo SAZ uguale al dato, e dal punto S, in cui 'l lato SA sega il semicircolo CRA, sopra 'l diametro CA tiro la perpendicolare ST; poscia col compasso prendendo la grandezza TA, la porto sulla scala da me formata, e trovando, ch' essa vale un certo numero di pertiche, faccio 'l quadruplo di questo numero, a fin d'avere l'ampiezza corrispondente all' angolo SAZ.

Parimente, s' io voglio sapere quale sia l'angolo, che conviene a una data ampiezza, sulla scala da me composta io piglio una gran-

grandezza uguale al quarto di detta ampiezza, e la porto sopra AZ da A in T; poscia in T io alzo una perpendicolare TS, e se questa sega il circolo in due punti V, S, da detti due punti tiro le rette VA, SA, ed ho due differenti angoli VAZ, SAZ, sotto cui aver posso l'ampiezza cercata; se poi TS toccasse il circolo senza segarlo, non avrei ch' un'angolo, sotto cui poter tirare, e quest'angolo sarebbe appunto quello di 45 gradi: ma se TS non segasse il circolo, l'ampiezza cercata sarebbe maggiore di quello dee essere per poter'ivi giugnere colla stessa carica.

Siccome una scala divisa in duemila parti, ciascuna delle quali fosse un pò sensibile, dovrebbe di necessità esser lunghissima, per lo che vi vorrebbe una carta troppo grande, così se ne può formare un'altra, la quale non ne contenga che'l quarto, cioè cinquecento parti uguali; e l'uso, che si farà della stessa, sarà il medesimo, non essendo in questa pratica necessarj che i quarti d'ampiezza.

Che se una scala di 500 parti sensibili fosse ancora troppo grande, si potrebbe farne un'altra, la quale non ne contenesse che la metà, cioè 250; e siccome questa rappresenterebbe l'ottava parte dell'ampiezza della carica più forte, così dovrebbesi formare un circolo, il quale non contenesse che l'ottava parte dell'ampiezze della carica, con cui si fosse fatta la pruova; e ciò nel seguente modo.

Supponiamo, che dopo aver tirato sotto un'angolo RAZ (*Fig.* 40.), e dopo aver preso il quarto AB dell'ampiezza trovata, m'accorga, che pel semicircolo CRA, il quale contiene tutt'i quarti d'ampiezza della stessa carica, sia necessaria una carta troppo grande. Prendo l'ottava parte di quest' ampiezza, cioè la metà del quarto AB, la porto da A in H, alzo la perpendicolare HS, ed in S alzo sopra AS la perpendicolare ST: poi intorno al diametro TA descrivo il semicircolo TSA, il quale conterrà tutti gli ottavi dell'ampiezze della stessa carica; perocchè, a motivo de' triangoli simili ASH, ARB, noi avremo AS. AR :: AH. AB, e per conseguente $AS = \frac{1}{2}AR$; e a cagione de' triangoli simili ASV, ARX, avremo VS. XR :: AS. AR, e quindi $VS = \frac{1}{2}XR$. Ora, nel semicircolo CRA, la retta RX è'l seno dell'angolo doppio dell'angolo RAZ di projezione (*N.* 143.), e nel semicircolo TSA la retta VS è altresì 'l seno dell'angolo doppio del medesimo angolo RAZ, od SAZ; onde il seno XR è doppio del seno VS. Che s'io voglio tirare sotto un'

un' altro angolo LAZ, troverò pure, che nel circolo CRA il seno LP dell' angolo doppio dell' angolo LAZ è parimente doppio del seno MN dell' angolo doppio dello stesso angolo LAZ, od NAZ; poichè, a motivo de' triangoli simili CRA, TSA, avremo CA. TA : : AR. AS, e però CA = 2TA : ma simili essendo i semicircoli, i seni PL, MN corrispondenti agli stessi angoli sono proporzionali al loro diametro, e per conseguenza PL = 2MN; poichè dunque tutt' i seni del semicircolo CRA son doppj di tutt' i seni corrispondenti del semicircolo TSA, e perchè i seni del semicircolo CRA sono i quarti d' ampiezza della carica, con cui s' è fatta la prova, così ne segue, che i seni del semicircolo TSA sono gli ottavi delle medesime ampiezze.

Dunque, per servirmi di questo semicircolo, che contiene gli ottavi dell' ampiezze, supponiamo, che si cerchi l' ampiezza corrispondente all' angolo NAZ: dal punto N, in cui la direzione NA sega il semicircolo TSA, tiro la retta NM perpendicolare al diametro TA, e pigliando MN, la porto su detta mia scala; quindi moltiplico per 8 la quantità delle pertiche, a cui essa equivale, e 'l prodotto sarà l' ampiezza cercata.

Se poi mi si dimanda, quale angolo corrisponda a una data ampiezza, piglio sull' accennata scala una quantità uguale all' ottava parte di detta ampiezza, e la porto da A in Q; quindi io innalzo la perpendicolare QN; e se questa sega il semicircolo TSA in due punti O, N, conduco le rette OA, NA, che mi danno due angoli, sotto cui io posso tirare, per avere l' ampiezza cercata, ec.

E' manifesto, che se 'l diametro TA non fosse che 'l quarto del diametro CA, il semicircolo TSA non conterrebbe se non se le metà degli ottavi, cioè le sedicesime parti dell' ampiezze; e quindi noi potremmo servirci di questo circolo, caso che 'l precedente fosse ancora troppo grande: per esempio, se si volesse l' ampiezza corrispondente all' angolo NAZ, si prenderebbe col compasso la grandezza MN, e porterebbesi sulla scala, a fin d' avere il suo valore in pertiche: ma siccome nella nostra ipotesi MN non sarebbe che la decima sesta parte dell' ampiezza, così moltiplicherebbesi 'l suo valore per 16, ovvero per 4, e poscia 'l prodotto per 4, il che darebbe l' ampiezza cercata; e se si cercasse l' angolo corrispondente ad un' ampiezza, dividerebbesi quest' ampiezza per 16, ovvero per 4, e poscia 'l quoziente per 4, e portando quest' ultimo quoziente da A in Q, si terminerebbe il restante come sopra.

Forse mi si dirà, non esser tanto facile di formare una scala esat-

esattamente divisa; e quindi io prevengo quest'imbroglio con un istrumento semplice, portatile, e nello stesso tempo assai comodo. Egli è composto di due Regole, simili a quelle d' un piede, le quali s'uniscono mediante una commessura; ma in vece di dare 6 pollici di lunghezza a ciascuna di queste Regole, io vorrei darne 8, acciò le divisioni fossero più sensibili: poste queste due Regole in retta linea, si farà divider la lunghezza totale in 250 parti, cioè le prime dugento di 20 in 20, l'altre 50 di 10 in 10, e l'ultima in 10 parti eguali, che rappresenteranno delle pertiche; e così la scala sarà formata, e la sua lunghezza totale sarà l'ottava parte dell'ampiezza maggiore colla più forte carica. Quindi noi potremo servircene, come sopra, per circoli, che conterranno le ottave, o sedicesime parti dell'ampiezze, ec.

Io ho molto insistito su questa pratica, non solo per essere facilissima, ma eziandio perch'ella ci esime dall' imbarazzo di ricorrere alle Tavole stampate, le quali per lo più son soggette ad errori così di calcolo, come di stampa.

158. PROBLEMA. *Trovar l'angolo, sotto cui conviene tirare con una data carica, per giugnere al segno situato al di sopra, o al di sotto del livello della batteria.*

Fatto prima di tutto a tale oggetto un tiro di prova sotto l'angolo di quindeci gradi, e misurata esattamente l' ampiezza, ch' egli avrà data, il doppio di quest'ampiezza sarà (*N.* 148.) l'ampiezza di 45 gradi, cioè la maggiore, e la metà dell'ampiezza maggiore, o l'ampiezza di 45 gradi sarà il diametro del circolo, che rinchiude l'ampiezze di tutte le projezioni della data carica di polvere (*N.* 149.) : dopo di ciò, tirate su una carta due linee AB, AC (*Fig.* 41.) perpendicolari l' una all' altra, e fatta la verticale AC uguale all'ampiezza di quindeci gradi, o alla maggior semiampiezza, dal punto C si tirerà una retta CZ indefinita, e parallela all'orizzontale.

Ora, se'l segno, su cui si vuol tirare, è al di sopra dell'orizzonte della batteria, come p. e. il punto P, o colla Trigonometria, o altrimenti misurasi la sua distanza orizzontale AB, e la sua altezza BP, e poscia con una scala trasportasi sopra la carta queste misure: quindi al punto A preso per centro, e con un raggio uguale al diametro AC descrivesi un'arco CRS; e dal punto P preso per centro, e con un raggio uguale alla distanza PZ dal segno alla linea CZ, si descrive un'altro arco ZRS. Così se i due archi non si segano, egli sarà impossibile di giugnere

gnere

gnere al termine propoſto colla data carica; e ſe ſeganſi in due punti R, S, conviene prender queſti punti per i fuochi di due parabole AHP, ADP, ch'avrebbono per direttrice la retta CZ; e queſte ſaranno le due parabole, che dalla bomba ſi poſſon deſcrivere per giugnere al ſegno: finalmente, ſe i due archi ſi toccaſſero ſenza ſegarſi, il punto del contatto ſi piglierebbe pel fuoco d'una parabola, la cui direttrice ſarebbe la retta CZ, e detta parabola ſarebbe allora l'unica, che dalla bomba potrebbeſi deſcrivere per giugnere al ſegno.

La ragione ſi è, ch'eſſendo la perpendicolare AC, tirata dal punto A ſulla direttrice CZ della parabola AHP, uguale alla retta AR tirata dal punto A al fuoco R di queſta parabola, di neceſſità ne ſegue, dover'eſſa parabola paſſare pel punto A di projezione; e ſiccome la perpendicolare PZ tirata dal punto P ſopra la ſteſſa direttrice equivale alla retta PR tirata dal medeſimo punto P al fuoco di queſta parabola, ne ſegue ancora, paſſar detta parabola pel termine P, il che fu dimoſtrato nelle Sezioni Coniche: moſtreremo nella ſteſſa guiſa, che la parabola, il cui fuoco è 'l punto S, e la direttrice è CZ, dee altresì paſſare per i punti A, P.

Per ritrovare l'angolo, ſotto cui la Bomba ha da deſcrivere la parabola AHP, biſogna dal punto C tirare al fuoco R di detta parabola la retta CR, quindi ſegar per mezzo in M eſſa retta, e dal punto A pel punto M tirar la retta AMV, che ſarà tangente della parabola, ſiccome fu dimoſtrato nelle Sezioni Coniche; ed in conſeguenza VAB ſarà l'angolo cercato: parimente, dal punto C al fuoco S dell'altra parabola AVP tirando la retta CS, e ſegandola per mezzo in X, la retta XA ſarà la tangente, ed XAB l'angolo, ſotto cui la Bomba deſcriverà la parabola ADP. Si potrebbono in ſimil guiſa trovare gli angoli, ſotto cui la Bomba può giugnere ad un termine ſituato al di ſotto dell'orizzonte della batteria, ſiccome ſcorgeſi dalla Figura 42.

159. AVVERTIMENTO. Queſto Problema è ſtato riſoluto in moltiſſimi modi differenti dalla maggior parte degli Autori, che hanno ſcritto di Meccanica: ma ſiccome la riſoluzione da me data, ch'è quella di Mr. *de la Hire*, è la più naturale e nel medeſimo tempo la più comoda, ſpezialmente quando ſi faccia uſo d'una Scala ſopra la carta, così ho creduto ben fatto di preferirla all' altre, le quali tutte ſono implicatiſſime.

160. Mr. *de la Hire*, dopo aver data la coſtruzione di queſto Problema, c'inſegna il modo di trovar l'angolo, o gli angoli,

ſotto

fotto cui la bomba può giungere al termine, quando ciò ottener fi voglia mediante la Trigonometria: ma perchè meglio fi concepifca quello, ch'ei dice, io credo che fia neceffario di riflettere ai feguenti principj.

161. *Se una linea* AB (Fig. 43.) *è divifa per mezzo in* C, *il prodotto dell' una delle fue parti* BC *pel quadruplo dell' altra* AC *equivale al quadrato dell' intera linea* AB: *ma fe la fteffa linea* AB *è divifa in due parti difuguali nel punto* D, *il prodotto dell' una delle fue parti* BD *pel quadruplo dell' altra* AD *è minore che 'l quadro dell' intera linea* AB *d'una quantità uguale al quadrato della differenza delle due parti* BD, AD.

A cagione di $BC = AC$, il prodotto di BC per $4AC$ è uguale al prodotto di $AC \times 4AC$, ed in confeguenza a $4\overline{AC}^2$, cioè a quattro quadrati della metà AC della linea AB: ma il quadro della linea AB è altresì uguale a quattro quadrati della fua metà AC; onde il prodotto della parte BC pel quadruplo della parte AC è uguale al quadrato della linea AB; il che doveafi 1°. dimoftrare.

Il prodotto della parte difuguale BD pel quadruplo dell' altra parte difuguale AD è $BD \times 4AD$, e'l quadrato della linea AB, ovvero $AD + DB$ è $\overline{AD}^2 + 2AD \times DB + \overline{DB}^2$; dunque da quefto quadrato levando il prodotto $BD \times 4AD$, il refiduo è $AD - 2AD \times DB + \overline{DB}^2$: ora la radice quadra di quefto refiduo è $AD - DB$, poichè $AD - DB$ moltiplicato in fe fteffo ci dà $\overline{AD}^2 - 2AD \times DB + \overline{BD}^2$, e $AD - BD$ è la differenza delle parti difuguali DB, AD; onde il quadrato della linea $AD + DB$ fupera il prodotto $BD \times 4AD$ d' una quantità uguale al quadro della differenza $AD - DB$ delle parti difuguali. Il che fi dovea 2°. dimoftrare.

162. *Quando una Bomba può giugnere al fegno* P, *che non fia al livello della Batteria* (Fig. 44.), *fcorrendo due differenti parabole, fe dal mezzo* O *della linea* AP, *condotta dalla batteria al fegno, tirafi una retta* OV *perpendicolare alla direttrice* GZ, *ella fegherà le due parabole in due differenti punti* H, h.

Per la coftruzione del Problema, i circoli defcritti coi raggi AC, PZ fi fegano in due punti R, S, l' uno al di fopra, e l' altro al di fotto della linea AP; ed in confeguenza il fuoco R dell'

dell' una delle parabole essendo più prossimo alla direttrice CZ che'l fuoco S dell'altra, l'asse QL della prima esser dee maggiore che l'asse TI della seconda: ora, ordinata essendo la linea AL all'asse QL, e la linea AI all'asse TS, se dal punto A tirasi una tangente alla parabola AQP, la suttangente YL sarà doppia dell'asse QL; e se dal medesimo punto A tirasi una tangente alla parabola ATP, la suttangente NI sarà doppia dell'asse TI: così YL sarà maggiore di NI; e quindi egli è facile conchiudere, che nel triangolo rettangolo YAL l'angolo YAL è maggiore di quello sia l'angolo NAI, e che conseguentemente AY segar dee la retta OV in un punto V più distante da O che'l punto *u*, in cui la retta AN sega la medesima retta OV.

Ora la retta OV, essendo parallela ai due assi delle due parabole, è diametro dell'una e dell'altra, e per conseguente la retta AP, che d'ambe le parti termina alle due parabole, e ch'è divisa per mezzo in O, è una doppia ordinata a questo diametro nell'una e nell'altra parabola; e siccome ella è tirata dal punto del contatto della parabola AQT, la suttangente VO esser dee doppia dell'assissa HO, e similmente, per essere anche AP tirata dal punto del contatto A della parabola ATP, la suttangente *u*O esser dee doppia dell'assissa *b*O. Ma noi abbiam veduto, che la suttangente VO è maggiore della suttangente *u*O; dunque l' assissa HO è altresì maggiore dell'assissa *b*O, e per conseguenza la retta OV sega le due parabole in due differenti punti H, *b*.

163. *Posto sempre, che dal mezzo del punto* O *sia tirata la retta* OV *perpendicolare alla direttrice, dico; che la parte* HE *di detta linea, compresa fra la direttrice* CZ *e la parabola* AQP, *è'l quarto del parametro del diametro* OH *di questa parabola, e che la parte* hE, *compresa fra la stessa direttrice e l'altra parabola* ATP, *è'l quarto del parametro del diametro* hO *di essa parabola.*

Dal punto H tiro al fuoco R della parabola AQP la retta HR, la quale, per la proprietà della parabola, è uguale ad HE: ora HR è'l quarto del parametro del diametro HO; dunque HE è altresì'l quarto di questo parametro. Così pure, se dal punto *b* al fuoco S della parabola ATP io conduco la retta *b*S, ella equivarrà ad *b*E, ed anche al quarto del parametro del diametro *b*O.

164. *Poste ancora le medesime cose, io dico; che 'l quarto* HE *del parametro del diametro* HO *della parabola* AQP *è uguale all' assissa* hO *della parabola* ATP, *e che reciprocamente il*

il quarto hE *del parametro del diametro* hO *della parabola* ATP *equivale all' assissa* HO *della parabola* AQP.

Nella parabola AQP noi abbiamo $\overline{AO}^2 = HO \times 4HE$, e nella parabola ATP abbiamo $\overline{AO}^2 = bO \times 4bE$; onde $HO \times 4HE = bO \times 4bE$, e però $HO \times HE = bO \times bE$, cioè la linea OE è divisa in H in due parti EH, HO, e in b in altre due bO, bE reciproche alle due EH, HO: ora egli s'è dimostrato nella Geometria (*Lib.II.N.*188.), ch' una retta OE non può esser'in questo modo divisa, quando ciascuna delle due parti EH, HO non sia uguale a ciascuna delle due bO, bE; dunque $EH = Ob$, ed $HO = bE$.

165. *Poste ancora le medesime cose, dico; che le tangenti* AV, Au *segano il diametro* OV *in due punti* V, u *equidistanti dall' una e dall' altra parte dalla direttrice* (Fig.44.).

Essendo la suttangente VO doppia dell' assissa OH, abbiamo $OH = VH = EH + EV$; dunque EV è la differenza della linea OH alla linea EH. Parimente, doppia essendo la suttangente uO dell' assissa Ob, abbiamo $Ob = bu = Eb - Eu$, ed in conseguenza Eu è la differenza della linea Eb alla linea bO: ma la differenza della linea OH alla linea HE è uguale alla differenza della linea Eb alla linea Ob; però $EV = Eu$.

166 Ora veggasi in qual modo M. de la Hire c'insegna a trovar gli angoli VAL, uAL, sotto cui la Bomba può giugnere al segno.

Nota essendo la linea AC, perch'è uguale alla metà dell'ampiezza maggiore della carica di polvere data, o colla Trigonometria, o in altro modo conosceremo la distanza orizzontale AB dal segno alla batteria, la sua altezza BP, e la sua distanza PZ alla direttrice CZ, per essere $BZ = CA$, ed in conseguenza $PZ = CA - BP$. Nel trapezoide ACZP, la retta OE sega i lati non paralleli ciascuno per mezzo; così OE è uguale alla metà della somma delle rette AC, ZP: in oltre nel triangolo rettanlo ABP, i cui tre lati saran dati, si conoscerà anche l'angolo PAB; ciò che darà il valore dell'angolo PAC compimento ad un retto dell'angolo PAB: in fine l'angolo VOA giunto all' angolo VOP equivale a due retti; e però, se dal valore di due retti levisi l'angolo VOP uguale all'angolo CAP, il residuo sarà'l valore dell'angolo VOA.

Date tutte queste cose, si tratta di conoscere la quantità EV;

la quale o ſi dee aggiugner' alla retta OE, per avere il lato OV del triangolo OVA, ovvero dalla ſteſſa linea OE ſi dee levare, per avere il lato O*u* del triangolo O*u*A; perocch' eſſendo allora noti i lati AO, OV del triangolo AOV, ſimilmente che l'angolo compreſo AOV, agevol coſa ſarà trovar l'angolo VAO, che aggiunto all'angolo PAB darà l'angolo VAB, ſotto cui conviene tirare, per far che la Bomba deſcriva la parabola AQP: così pure, ſe nel triangolo *u*AO conoſcons'i lati AO, O*u*, e l'angolo compreſo, ſi conoſcerà pure l'angolo *u*AO, il quale giunto all' angolo PAB farà conoſcer l'angolo *u*AB, ſotto cui la Bomba dee deſcrivere la parabola ATP.

Ora noi ſappiamo, che'l quadrato di AO è uguale al rettangolo OH × 4HE, e che, ſe dal quadro di OE levaſi 'l rettangolo OH × 4HE, il reſiduo è'l quadrato della differenza delle linee OH, HE, e per conſeguente il quadro di VE, od E*u*, che ſi ha da levare, o d'aggiugnere ad OE; ſe dunque dal quadrato di OE toglieſi 'l quadro di AO, il reſiduo ſarà 'l quadrato di VE, ovvero E*u*, e quindi da queſto reſiduo eſtraendo la radice quadra, s'avrà 'l valore di VE.

167. Caſo che la Bomba non poteſſe giugnere al termine che con una ſola parabola, i due circoli deſcritti coi raggi AC, PZ (*Fig.* 45.) ſi toccherebbero ſenza ſegarſi, ed in conſeguenza il punto del contatto R ſarebbe ſopra la retta AP, che paſſa per i due centri; così AP ſarebbe uguale alla ſomma de' raggi AC, PZ, ed AO metà di AP ſarebbe uguale alla metà di queſta ſomma, cioè ad OE, e'l quadro di AO al quadro di OE: ora, per la proprietà della parabola, noi avremmo $\overline{AO}^2 = OH \times 4HE$; dunque $OH \times 4HE = \overline{OE}^2$, ed in conſegueuza il punto H dividerebbe per mezzo la linea OE; perocchè, ſe uguali non foſſero le linee OH, HE, avrebbeſi $OH \times 4HE$ minor di $\overline{OE}^2$ (*N.* 161.), il ch'è ancora contro l'ipoteſi: così in tal caſo la tangente AE ſegherebbe la linea OE nel punto E, in cui ella ſega la direttrice, e'l triangolo EOA ſarebbe iſoſcele. Perciò, dato l'angolo EOA, gli altri due preſi inſieme ſarebbero uguali al compimento a due retti dell'angolo EOA, e la metà di queſto compimento ſarebbe il valore dell'angolo EAO; dopo di che, facil coſa ſarebbe terminare il rimanente.

In pratica, dopo cercati gli angoli PAB (*Fig.* 44.), PAC,

EOA,

EOA, prendesi la metà della somma delle rette AC, PZ, se ne fa il quadro, e da esso togliesi 'l quadrato di AO: se nulla avanza, il triangolo EAO (*Fig.* 45.) è isoscele, ed in conseguenza facilmente si conoscerà l'angolo EAO, che giunto all'angolo PAB darà l'angolo EAB, sotto cui si dee tirare: ma se dopo sottratto dal quadro di EO quello di AO qualche cosa avanza, s'estrarrà la radice quadra dal residuo, ed ella sarà la quantità, che si dee aggiugnere, o sottrar da EO per avere i triangoli VAO, *u*AO (*Fig.* 44.); e mediante questi triangali si conosceranno gli angoli VAO, *u*AO, a ciascuno de' quali giugnendo l'angolo PAB s'avran gli angoli VAB, *u*AB, sotto cui può la Bomba giugnere al segno.

168. Tutto ciò per dir'il vero è molto ingegnoso, ma in pratica io vorrei piuttosto servirmi d'nna scala, come ho detto per l'innanzi, il ch'è di minor'imbarazzo. Che se prendendo le misure sulla scala, di cui io ho dato la costruzione, le Figure 41 e 42 divenissero troppo grandi, le diminuirei in questa guisa: Prenderei 'l quarto di AC; alle due estremità di questo quarto alzerei due perpendicolari uguali ciascuna al quarto di AB; sull'estremità B del quarto di AB ne alzerei un'altra uguale al quarto di BP; poi col quarto di AC e con quello di PZ descriverei i due circoli, che si segherebbero, o toccherebbono, secondo che vi fossero due, o soltanto una parabola; e terminando 'l restante come sopra (*N.* 158.), piglierei con un semicircolo trasparente gli angoli VAO, *u*AO (*Fig.*44.), ovvero l'angolo EAO (*Fig.* 45.), secondo che vi fossero due, o soltanto una parabola.

169. AVVERTIMENTO. Prima di por fine a questa materia, penso di produrre un'altro metodo di mia invenzione, con cui poter facilmente trovare il modo di giugnere al segno situato al di sopra, o al di sotto del livello della batteria. Questo mio metodo dipende dal susseguente principio.

170. *Se tagliasi in quattro parti eguali l'ampiezza* AC(Fig.46.) *d'una parabola* ABC, *e che da' punti di divisione s'alzino delle perpendicolari* MN, TB, SR, *le quali seghin la parabola ne' punti* M, B, S, *dico; che le due perpendicolari* MN, RS, *le quali son' a sinistra e a dritta della perpendicolare* TB, *sono fra loro uguali*, *e che la perpendicolare* TB *supera ognuna dell'altre due d'una quantità uguale ai loro terzi.*

Essendo AC l'ampiezza della parabola, e TB essendo perpendicolare al mezzo di detta ampiezza, manifestamente si scorge, che

M 2 TB

TB è l'asse; onde dal punto S tirando l'ordinata SP, la quale sarà parallela ed uguale a TR, avremo $\overline{SP}^2 = BP \times a$, chiamando $= a$ il parametro, ed in conseguenza $\overline{TR}^2 = BP \times a$: ora noi avremo ancora $\overline{CT}^2 = BT \times a$; dunque $\overline{CT}^2 - TR = CT \times a - BP \times a = TP \times a$: ma a motivo delle parallele noi abbiamo $TP = SR$; però $\overline{CT}^2 - \overline{TR}^2 = SR \times a$. Così pure, dal punto N tirando un'ordinata all'asse, troveremo collo stesso ragionamento $\overline{AT}^2 - \overline{MT}^2 = NM \times a$: ma $\overline{AT}^2 - \overline{MT}^2 = \overline{CT}^2 - \overline{TR}^2$, a cagione di $AT = CT$, e di $MT = TR$; quindi $NM \times a = SR \times a$, e conseguentemente $NM = SR$. Il che doveasi 1°. dimostrare.

Ora egli s'è trovato $\overline{SP}^2 = BP \times a$, e $\overline{CT}^2 = TB \times a$; dunque $\overline{SP}^2 . \overline{CT}^2 :: BP \times a . TB \times a :: BP . TB$: ma $\overline{SP}^2 = \overline{TR}^2$ a motivo di $SP = TR$, e siccome TR non è se non se la metà di TC, così 'l quadrato di TR non è che 'l quarto del quadro di GT; dunque $\overline{TR}^2$, od $\overline{SP}^2 = \frac{1}{4}\overline{TC}^2$, ed in conseguenza $\frac{1}{4}\overline{CT}^2 . \overline{CT}^2 :: BP . TB$, ovvero $\frac{1}{4} . 1 :: BP . TB$, od $1 . 4 :: BP . TB$, cioè BP è 'l quarto di BT, ovvero 'l terzo di TP: ma TP è uguale ad SR; onde l'eccesso di BP sopra SR, o sul suo eguale MN uguaglia 'l terzo di SR. Il che si dovea 2°. dimostrare.

171. PROBLEMA. *Giugnere col mezzo del precedente principio ad un segno situato al di sopra, o al di sotto del livello della batteria.*

Sia la batteria in A (*Fig.* 47.), e 'l termine P situato al di sopra del livello: o colla Trigonometria, o in altro modo misuro la distanza orizzontale AN dal segno alla batteria, e la sua altezza NP al di sopra del livello. Divido AN in tre parti uguali AR, RS, SN, e ad AN aggiungo una parte NT uguale ad $\frac{1}{3}AN$. In S io alzo la perpendicolare SO, ch'io faccio uguale ad $NP + \frac{1}{3}NP$, e la parabola AOT, ch'avrà per altezza, o per asse la retta SO, e per ordinata la retta AS metà di AT, passerà pel segno P; perocchè, essendo l'ampiezza AT divisa in quattro parti eguali, la perpendicolare SO tirata dal punto di mezzo S supera ciascuna delle perpendicolari NP, RH, tirate dagli altri due

due punti R, N, d'una quantità uguale al loro terzo; dunque i punti H, P sono alla parabola (*N.* 170.).

Se 'l segno P è al di sotto del livello AR della batteria A (*Fig.* 48.), piglio la distanza orizzontale, e la profondità RP.

Divido AR in tre parti uguali AN, NT, TR: sopra l'estremità N della prima parte AN io alzo la perpendicolare BN, cui faccio uguale al terzo della profondità RP; e la parabola, ch'avrà per asse la retta BN, e per ordinata il terzo AN, passerà pel punto P; il che io così dimostro.

Dal punto P io tiro PH parallela ed uguale ad AR; divido PH in tre parti eguali PO, OE, EH, ch'equivaranno ciascuna a ciascuna alle tre parti uguali di AR; a PH aggiugno la parte HS uguale al terzo di PH; e finalmente da punti H, E, O io alzo le perpendicolari HA, EB, TO ed AH uguali ciascuna ad RP, e faccio EB uguale a TO $+ \frac{1}{3}$TO: così la parabola, ch' avrà per asse la retta EB, e per ordinata la retta SE, od EP, passerà per i punti A, T (*N.* 170.): ora gli archi SA, TP di questa parabola sono la continuazione della curva parabolica ABT, il cui asse BN è 'l terzo di NE, od RP, e l'ordinata AN il terzo di AR; onde la parabola ABT, essendo continuata dalla banda di P, passar dee pel punto P.

La regola adunque si è, quando 'l segno è al di sopra dell' orizzonte della batteria, d'aggiugnere alla distanza orizzontale AN del segno (*Fig.* 47.) il terzo di detta distanza, e alla sua altezza NP il suo terzo, per avere l'ampiezza AT, e l'altezza SO della parabola, che passar dee pel segno P; e quando 'l segno P è al di sotto dell' orizzonte (*Fig.* 48.) la regola è di prendere i due terzi AT della distanza orizzontale AR, e 'l terzo della profondità RP, per avere l'ampiezza AT, e l'altezza BN della parabola, che passerà pel segno P.

L'angolo sotto cui, così nell' uno come nell'altro caso, si dee tirare, è facile a trovarsi; sapendosi già, che per ritrovare la tangente basta solo prolungar l'asse SO (*Fig.* 49.), fare OM = SO, e tirar la retta MA: ed MAS sarà l'angolo ricercato.

Altro dunque non ci resta che ritrovar la carica necessaria per giugnere a detto segno, tirando sotto l' angolo ritrovato; e ciò noi procureremo di scoprire dopo fatte le seguenti osservazioni.

172. *Se con un medesimo mortajo, ma con due differenti cariche tirasi una stessa Bomba sotto un medesimo angolo, le due ampiezze di dette*

dette due cariche saranno fra loro come i diametri de' semicircoli, che comprendono le projezioni di queste differenti cariche.

Supponiamo, che'l semicircolo ABC (*Fig.* 50.) comprenda le differenti ampiezze delle projezioni fatte colla prima carica, e che 'l semicircolo DEC comprenda le differenti ampiezze delle projezioni fatte colla seconda; supponiamo in oltre, che colle stesse due cariche si abbia tirato sotto 'l medesimo angolo ECP. Simili essendo fra loro i due semicircoli, ed uguale l' angolo BCP all'angolo ECP, la retta BH, seno dell' angolo doppio dell'angolo BCP, sarà al seno totale, o al raggio del semicircolo ABC, come la retta EV, seno dell' angolo doppio del medesimo angolo BCF, od ECF, è al seno totale, o al raggio del semicircolo DEA: ora il seno HB del semicircolo ABC è'l quarto d'ampiezza CR della prima carica di polvere, e 'l seno EA è'l quarto dell' ampiezza CP della seconda; dunque l' ampiezza CR è all'ampiezza CP, come il raggio del semicircolo ABC è al raggio del semicircolo DEC, o come'l diametro AC è al diametro DC.

173. *Dunque le forze di due differenti cariche sono fra loro come le radici dell' ampiezze di dette due cariche sotto i medesimi angoli.*

Le forze delle due cariche sono fra se come le radici de'diametri AC, DC: ma questi diametri son come l' ampiezze CR, CP; onde anche le forze sono come le radici dell'ampiezze sotto i medesimi angoli.

Quindi ne segue, che con due differenti cariche e sotto uno stesso angolo non si può avere la medesima ampiezza; perocchè differenti essendo le forze, egli lo saranno ancora l'ampiezze, che sono come i quadri di dette forze.

174. *Due differenti cariche sotto un medesimo angolo, e in uno stesso Mortajo non saranno sempre fra se nella medesima ragione delle loro ampiezze.*

Se dopo aver tirato, per esempio con quattr'oncie, e poi con otto sotto lo stesso angolo, avviene, che l'ampiezze sieno fra loro come quattro ed otto, volendosi tirare con tre, e poi con sei, o con cinque, e poi con dieci avverrà (e ciò noi lo sappiamo per le costanti esperienze fatte), che l' ampiezze più non saranno in ragione di tre a sei, ovvero di cinque a dieci, non meno che se si volesse tirar con una libra, e poi con due, ovvero prima con due, e poscia con quattro, ec. Talchè il rapporto dell' ampiezze, in vece d'esser sempre come il rapporto delle cariche,

cioè

cioè come 'l rapporto 1, 2, è talvolta maggiore, e talor minore; e a misura che le due cariche diventan più forti, conservando sempre il rapporto di 1 a 2, il rapporto dell' ampiezze diventa minore, senza serbare verun'ordine fisso, su cui sia possibile di stabilire regole certe e costanti. Ciò nasce dalle differenti infiammazioni della polvere, dalle differenti velocità di quest' infiammazioni, dai differenti pesi delle Bombe, sebben fatte per lo stesso Mortajo, e da moltissimi altri accidenti, ch' io reputo superfluo di quì accennare.

Ora, per determinar la carica che conviene, dopo trovata col Problema precedente la parabola, che dee passare per un segno situato al di sopra, o al di sotto dell'orizzonte, supponiamo aver' io ritrovato esser la parabola AEH (*Fig.* 51.) : divido l' ampiezza AH in quattro parti eguali in P, T, V; sul punto P io alzo la perpendicolare PM, che sega la tangente AS in M; alzo in M la retta BM perpendicolare ad AM, e segante in B la verticale AB, e sopra AB preso per diametro descrivendo il semicircolo BMA, egli comprenderà le differenti projezioni della carica di polvere necessaria per far descrivere alla Bomba la parabola AEH sotto l'angolo SAH. Ora, s'io conosco il semicircolo, che comprende le differenti projezioni d'una carica di polvere data, e che 'l diametro di detto semicircolo sia uguale al diametro AB, è manifesto, che questa carica di polvere data sarà quella ch' io cerco per giugnere al segno P: ma se questo diametro non è uguale al diametro AB, come per esempio il diametro AC minore di AB, l'ampiezza della data carica sotto l' angolo SAH sarà all'ampiezza di quella, ch' io cerco, sotto 'l medesimo angolo, come 'l diametro AC è al diametro AB (*N.*172.); però, se le cariche fossero come l'ampiezze sotto i medesimi angoli, colla semplice Regola del Tre io troverei la carica cercata, dicendo: AC è ad AB, come la data carica è ad un quarto termine, che sarebbe la carica, ch' io cerco. Ora, quantunque ciò non sia (come sopra s'è veduto), cerco tutta volta questo quarto termine, e con essa carica tirando sotto l' angolo SAH esamino, se l'ampiezza è maggiore, o minor di AH: se è maggiore, diminuisco un pò la carica, e se è minore, alcuna cosa l'accresco; e mediante ciò, dopo aver tirato due, o tre volte, io opero con tanta precizione, da poter giugnere al segno, il quale, come già si sà, non è un punto matematico, che ricerchi tutta l'esattezza Geometrica.

Se

Se poi non conoscessi 'l semicircolo d'alcuna delle date cariche, sotto cui si può tirare, farei un tiro di prova coll'una di esse, e per mezzo della sua ampiezza cercando 'l semicircolo corrispondente a tutte le sue projezioni, terminerei 'l restante come sopra.

Ma egli mi si dirà, non contenere questo Metodo in se alcuna precisione; e ciò io non negho, ma rispondo bene, essere una tal' imperfezione comune anche ai Metodi degli altri, p. e. a quello di M^r. *d' la Hire* su riferito, a cagione della resistenza dell' aria, e de' varj accidenti, ch'alterano i tiri. S' esamini adunque quale di tutti questi sia 'l più facile, e quello si seguiti, ch'io rispetterò sempre il giudizio del Pubblico.

175. Dopo aver trattato delle leggi dell'urto de' corpi farem ragionamento della forza, con cui una Bomba colpisce un corpo, ch'ella incontra in qualunque punto della parabola da essa descritta, e de' suoi diversi affondamenti nelle terre, secondo ch' ella scorre differenti parabole.

Delle Leggi dell'Urto de' Corpi.

176. I corpi solidi, dei quali soltanto presentemente noi parliamo, dividonsi in tre spezie, vale a dire in *molli*, *duri*, *ed elastici*.

Il corpo *molle* è quello, ch' urtando, o urtato da un' altro corpo cangia subito figura, senza più ripigliar quella, ch'ei avea prima.

Il corpo *duro* è quello, ch' urtando, o urtato da un'altro corpo non cangia figura. E finalmente l'*elastico* è quello, che per l' urto cangia ben figura, ma tosto ripiglia la sua. La forza, che ha questo corpo di ripigliare la sua figura, chiamasi forza *elastica*.

Siccome nella Natura noi non conosciamo verun corpo, il quale sia perfettamente duro, o privo d'ogni forza elastica, così ci ristrigneremo a parlare dell' urto de' corpi molli, e di quello degli elastici; e quantunque tutt'i corpi molli abbiano qualche poco d' elasticità, cioè che dopo l'urto ripiglino alcuna cosa della lor prima figura, tuttavolta, essendo la sua forza elastica per lo più impercettibile, ed in conseguenza capace d' un' effetto, che appena si può comprendere, li considereremo come privi di qualunque elasticità.

177. L'*azione* d'un corpo sopra un' altro è 'l modo, con cui questo corpo agisce sopra l' altro; e la *reazione* si è 'l modo, con cui 'l corpo urtato, o premuto agisce sopra quello, che l'urta, o'l preme.

178. Ciaſ-

178. Ciascun corpo, ch' agisce sopra un' altro, riceve da questo secondo una reazione uguale alla sua azione. Se con un dito premesi una pietra, il dito tanto sarà dalla pietra premuto, quanto la pietra sarà premuta dal dito. Se un cavallo tira un peso, esso è dal peso egualmente tirato, cioè la forza, che 'l medesimo ha d' andar' avanti, è diminuita d' una quantità uguale alla quantità di forza necessaria per muovere questo corpo; e quindi egli s' è dedotto il presente assioma, o principio: *La reazione è uguale, e contraria all' azione*.

179. PROPOSIZIONE XVIII. *Se un corpo* A *non elastico urta un' altro corpo immobil* B, *il moto del corpo* A *totalmente cessa dopo l' urto*.

Il corpo A urta il corpo B con una forza, ch' è 'l prodotto della sua massa per la sua velocità: ora, tendendo egli sempre a conservare il suo moto, e 'l corpo B essendo immobile, ei urta detto corpo con tutta la sua forza, e B reagisce nello stesso modo (*N.* 178.); onde le due forze, essendo contrarie, si distruggono, e perchè supponiamo il corpo A esser privo di forza elastica, la quale lo faccia tornar' indietro per farli ripigliare la figura, ch' avea prima dell' urto, il moto dee totalmente cessare.

180. PROPOSIZIONE XIX. *Se un corpo* A *non elastico urta un' altro corpo* B, *il quale, o sia in quiete ma tuttavolta possa seco strascinare, o che vadi con minor velocità secondo la sua direzione, i corpi dopo l' urto sono in moto secondo la direzione di* A.

Il corpo A, essendo in moto, procura certo di mantenervisi: ora A, urtando B può ad esso imprimere una parte della sua velocità in modo che glie ne resti da muoversi; onde a torto direbbesi, perdere A tutto il suo moto: ma perchè il corpo A non comunica se non una parte della sua forza a B, il corpo B colla sua reazione non distrugge in A che detta parte, e in conseguenza ad A tanta ne resta da potersi muovere secondo la sua prima direzione.

181. COROLLARIO. Quindi ne segue, che 'l corpo A non dee imprimere a B se non quella forza, che gli è necessaria per andar' insieme colla stessa velocità; perocchè andando A e B con egual velocità, B non impedirà il moto di A, e conseguentemente non vedesi, perchè A dovesse a B comunicare un moto maggiore.

182. PROPOSIZIONE XX. *Se due corpi non elastici* A, B *urtansi con forze uguali, e direzioni contrarie, dopo l' urto essi rimangono in quiete*.

Le due forze, essendo uguali e contrarie, reciprocamente si distruggono; e perchè li due corpi son privi di forza elastica, che li costringa di tornar'indietro per far ripigliare al corpo la sua prima figura, il moto cessa totalmente.

183. PROPOSIZIONE XXI. *Se un corpo* A. *non elastico urta un'altro corpo non elastico* B, *il quale sia in quiete ma tuttavolta possa seco strascinare, o che si muova con minor valocità secondo la stessa direzione, la quantità di moto prima dell'urto è uguale alla quantità di moto dopo l'urto.*

Supponiamo che B prima dell'urto sia in quiete, e chiamisi a la quantità di moto del corpo A prima dell'urto, e b la quantità di moto, che A imprime al corpo B: dunque la quantità di moto di A dopo l'urto sarà $a - b$; quella di B sarà b, e la somma di queste due quantità sarà $a - b + b$, cioè a; ed in conseguenza ella sarà uguale alla quantità di moto a esistente prima dell'urto.

Ora sopponiamo, che A e B sieno in moto prima dell'urto; che la quantità di moto A prima dell'urto sia a; che quella di B sia b, e che quella impressa da A a B nell'istante dell'urto sia c: dunque dopo l'urto la quantità di moto di A sarà $a - c$; quella di B sarà $b + c$, e la somma delle due quantità sarà $a - c + b + c$, ovvero $a + b$. Ma la quantità di moto prima dell'urto è altresì $a + b$; onde le quantità di moto son' uguali avanti e dopo l'urto.

184. PROPOSIZIONE XXII. *Se due corpi* A, B *non elastici urtansi con direzioni contrarie e forze disuguali, la differenza delle quantità di moto prima dell'urto è uguale alla somma delle quantità di moto dopo l'urto.*

Supponiamo, che la quantità di moto a del corpo A prima dell'urto sia maggiore della quantità di moto b del corpo B: A, urtando B, distruggerà la quantità di moto b, ch'è contraria alla sua direzione, e in oltre produrrà in B una quantità di moto c secondo la stessa sua direzione. Ma B colla sua reazione distruggerà in a una quantità eguale a b, ed un'altra uguale a c: onde la quantità di moto di A dopo l'urto sarà $a - b - c$; quella di B sarà c, e la somma delle due quantità sarà $a - b - c + c$, cioè $a - b$. Ora prima dell'urto la differenza delle quantità di moto era $a - b$; dunque la differenza delle quantità di moto prima dell'urto è uguale alla somma delle quantità di moto dopo l'urto.

185. AVVERTIMENTO. Pretendono i Carteſiani, che tanto in queſta come nella precedente Propoſizione ſiavi un' egual quantità di moto avanti e dopo l'urto: ma ciò naſce, perchè nel caſo delle direzioni contrarie eſſi non prendono per quantità di moto ſe non quella, la quale ſecondo la direzione del corpo ha più forza, dopo ſottratto la quantità di moto oppoſta dal corpo, che ne ha meno, vale a dire eſſi chiamano quantità di moto prima dell'urto ciò, che da noi s' appella differenza di quantità di moto; ond' il favellar di loro beniſſimo s'accorda col noſtro, quantunque i termini, di cui eglino ſi ſervono, pajano ai noſtri direttamente oppoſti.

186. PROPOSIZIONE XXIII. *Se un corpo* A *non elaſtico urta un' altro corpo non elaſtico* B, *il quale ſia in quiete, ma che tuttavolta poſſa ſeco ſtraſcinare, la velocità comune dopo l' urto equivale alla quantità di moto di* A *prima dell' urto diviſa per la ſomma delle maſſe dei due corpi.*

Chiamiſi M la maſſa di A, m quella di B, ed V la velocità di A prima dell'urto; dunque la quantità di moto di A prima dell'urto è MV: ora la ſomma delle quantità di moto dei due corpi dopo l'urto è ancora MV (*N.* 183.); e perchè queſti due corpi dopo l' urto hanno una velocità comune (*N.* 181.), la ſomma delle quantità di moto altro non è che la ſomma della lor maſſa moltiplicata per la velocità comune; onde ſe divideſi la ſomma MV delle loro quantità di moto per la ſomma $M + m$ delle lor maſſe, il quoziente $\frac{MV}{M+m}$ ſarà la velocità comune dopo l' urto.

187. Se $M = m$, s' avrà $\frac{MV}{M+m} = \frac{MV}{M+2m} = \frac{V}{2}$, cioè la velocità comune dopo l' urto ſarà la metà della velocità dell' urto.

Se $m = 2M$, s' avrà $\frac{MV}{M+m} = \frac{MV}{3M} = \frac{V}{3}$, cioè la velocità comune dopo l' urto ſarà 'l terzo della velocità prima dell' urto, e così in altri caſi.

All' incontro, ſe $M = 2m$, s' avrà $\frac{MV}{M+m} = \frac{2mV}{3m} = \frac{2V}{3}$, cioè la velocità comune dopo l' urto ſarà li $\frac{2}{3}$ della velocità prima dell' urto.

Se $M = 3m$, s'avrà $\frac{MV}{M+m} = \frac{3mV}{4m} = \frac{3V}{4}$, cioè la velocità comune dopo l'urto sarà li $\frac{3}{4}$ della velocità prima dell'urto, e così in altri casi.

Donde avviene, che quanto più il corpo A è maggior rispetto a B, tanto maggiore dopo l'urto è la velocità, quantunque sempre minor di quella prima dell'urto; e all'opposto, quanto B è maggiore rispetto ad A, tanto minor'è la velocità dopo l'urto.

188. PROPOSIZIONE XXIV. *Se un corpo A non elastico urta un' altro corpo non elastico B, il quale muovasi secondo la stessa direzione, ma con minor velocità di lui, la velocità comune dopo l'urto equivale alla somma delle quantità di moto prima dell'urto divisa per la somma delle masse.*

Chiamisi M la massa di A, V la sua velocità, m la massa di B, ed u la sua velocità; dunque la quantità di moto di A prima dell'urto sarà MV, quella di B sarà mu, e la somma delle due sarà $MV + mu$: ora, la quantità di moto dopo l'urto sarà pure $MV + mu$ (*N.* 183.), e a motivo della velocità comune dopo l'urto (*N.* 181.) la somma delle quantità di moto dopo l' urto altro non è che la somma delle masse moltiplicata per la comun velocità; onde se dividesi la quantità de' moti $MV + mu$ dopo l'urto per la somma delle masse, il quoziente $\frac{MV + mu}{M\ m}$ sarà la velocità comune dopo l'urto.

Se supponiamo $M = 2m$, ed $V = 2u$, s' avrà $\frac{MV + mu}{M + m}$ $= \frac{2m \times 2u + mu}{3m} = \frac{4mu + mu}{3m} = \frac{5mu}{3m} = \frac{5}{3}u$, cioè la velocità dopo l' urto è uguale ai $\frac{5}{3}$ della velocità di B prima dell'urto; e con tal calcolo si troverà sempre la velocità dopo l'urto secondo i differenti rapporti delle masse e delle velocità prima dell'urto.

189. PROPOSIZIONE XXV. *Se un corpo A non elastico urta un altro corpo non elastico B, che muovesi con una direzione contraria alla sua, ma con minor quantità di moto, la velocità comune dopo l' urto sarà uguale alla differenza delle quantità di moto prima dell'urto divisa per la somma delle masse.*

Chiamando sempre le medesime quantità nello stesso modo, avremo MV per la quantità di moto del corpo A prima dell' urto, mu per quella di B, ed $MV - mu$ per la differenza delle quantità di moto: ora questa differenza equivale alla somma delle

quan-

quantità di moto dopo l'urto (*N.* 184.) , e a motivo della velocità comune dopo l'urto la somma delle quantità di moto dopo l'urto equivale alla somma delle masse moltiplicata per la comun velocità ; onde se dividesi la somma $MV - mu$ delle quantità di moto dopo l'urto per la somma $M + m$ delle masse , il quoziente $\frac{MV - mu}{M + m}$ sarà la comun velocità dopo l'urto.

Se supponesi $M = 2m$, ed $V = 2u$, s'avrà $\frac{MV - mu}{M + m}$ $= \frac{2m \times 2u - mu}{3m} = \frac{4mu - mu}{3m} = \frac{3mu}{3m} = u$, cioè la velocità dopo l'urto sarà uguale alla velocità di B prima dell'urto.

Parimente , se supponesi $M = m$, ed $V = 2u$, s'avrà $\frac{MV - mu}{M + m} = \frac{2Mu - Mu}{2M} = \frac{Mu}{2M} = \frac{u}{2}$, cioè la velocità comune dopo l'urto equivale alla metà della velocità di B prima dell' urto; e con tal calcolo si troverà sempre la velocità comune dopo l'urto secondo i differenti rapporti delle masse, e delle velocità prima dell' urto.

190. Le tre formule della velocità comune dopo l' urto son dunque $\frac{MV}{M + m}$, quando 'l corpo B è in quiete prima dell' urto ; $\frac{MV + mu}{M + m}$, quando 'l corpo B prima dell' urto muovesi secondo la direzione di A, ma con minor velocità , ed $\frac{MV - mu}{M + m}$, quando 'l corpo B muovesi con una direzione contraria a quella di A, ma con minor forza: Usiamo attenzione a queste tre formule , perocch' elle molto ci serviranno in ciò che siam per dire dell' urto de' corpi elastici.

191. PROPOSIZIONE XXVI. *Se un corpo* A *non elastico urta un' altro corpo non elastico* B, *il quale sia in quiete , esso lo urta con tutta la sua velocità: se* B *muovesi secondo la direzione di* A , *ma con minor velocità , il corpo* A, *l' urta colla differenza delle velocità ; e se detto corpo* B *muovesi con una direzione contraria a quella di* A , *il corpo* A *l' urta colla somma delle velocità.*

La prima parte di questa Proposizione è per se evidente non meno che la seconda, perocchè il corpo A, mosso colla stessa velocità B, giammai giugnerebbe B , mercè che niuno de' due corpi in tempo eguale farebbe più camino dell'altro ; ed in confeguen-

guenza A non giugne, nè urta B se non per l'eccesso della sua velocità sopra quella di B: in fine, agevolmente si proverà la terza parte, facendo vedere, che quando A urta B, il quale a lui s'avvicina, la quantità di moto, ch'esso perde, è uguale a quella, ch'ei perderebbe se andasse ad urtare il corpo B in quiete con una velocità uguale alla somma delle velocità.

In fatti, quando A e B insieme si muovono, la quantità di moto di A prima dell'urto è MV, quella di B è mu, e la velocità comune dopo l'urto è $\frac{MV - mu}{M + m}$ (*N.* 189.); onde la quantità di moto di A dopo l'urto è $\frac{MMV - Mmu}{M + m}$: ma la sua quantità di moto prima dell'urto era MV; dunque ciò ch'egli ha perduto per l'urto è $MV - \frac{MMV + Mmu}{M + m}$, ovvero $\frac{MMV + MmV - MMV + Mmu}{M + m}$, il che riducesi ad $\frac{MmV + Mmu}{M + m}$.

Ora supponiamo, che 'l corpo A si muova colla velocità $V + u$, e che B sia in quiete. La quantità di moto di A prima dell'urto sarà $MV + Mu$, e la somma delle quantità di moto dopo l'urto sarà altresì $MV + Mu$: così la velocità comune dopo l'urto sarà $\frac{MV + Mu}{M + m}$, e la quantità di moto di A dopo l'urto sarà $\frac{MMV + MMu}{M + m}$; onde ciò ch'egli avrà perduto per l'urto sarà $MV + Mu - \frac{MMV - MMu}{M + m}$, ovvero $\frac{MMV + MmV + MMu + Mmu - MMV - MMu}{M + m}$, il che riducesi ad $\frac{MmV + Mmu}{M + m}$: ma questa perdita equivale alla precedente; dunque, perchè il corpo A viene a sempre perdere lo stesso così nell'uno, come nell'altro modo, ei urta il corpo B in moto nella stessa maniera che l'urterebbe colla velocità $V + u$, se B fosse in quiete.

192. PROPOSIZIONE XXVII. *La forza elastica d'un corpo è uguale alla forza, che 'l comprime, o tende senza romperlo.*

Se 'l corpo è compresso, o teso senza che si rompa, ei dunque resiste con una forza uguale a quella, che 'l comprime, o tende-

ma

ma egli non resiste che per la forza elastica; onde la forza elastica è uguale alla forza, che 'l comprime, o tende.

193. PROBLEMA. *Data la velocità d' un corpo* A *elastico, ch' urta un' altro corpo elastico* B *in quiete, conoscer le velocità dopo l' urto.*

Se i due corpi non fossero elastici, la velocità comune dopo l' urto sarebbe $\frac{MV}{M+m}$ (*N.* 186.). Ma nell' istante dell' urto le forze elastiche son compresse colla velocità V dell' urto, e le resistenze di dette forze son' uguali, poichè l' una non può superar l' altra: ond' egli è necessario, che la velocità V si distribuisca alle due forze elastiche reciprocamente alle lor masse; cioè, chiamando x la parte della velocità V, cui riceve la forza elastica di B, o con cui ella resiste alla forza elastica di A, ed $V - x$ la parte della velocità V, con cui la forza elastica di A resiste a quella di B, dee la forza Bx, od mx esser' uguale alla forza $AV - Ax$, od $MV - Mx$; e in conseguenza, a motivo di $mx = MV - Mx$, si ha $x . V - x :: M . m$.

Perchè $mx = MV - Mx$, avremo $mx + Mx = MV$; e però $x = \frac{MV}{M+m}$: così la velocità, cui riceve la forza elastica di B, è $\frac{MV}{M+m}$. Ora, non potendo questa forza elastica stendersi dalla banda di A, la cui forza elastica le resiste colla medesima forza, necessariamente conviene, che sospinga B dall'altra banda, e che in conseguenza a B imprima la velocità $\frac{MV}{M+m}$: ma independentemente dalla forza elastica la velocità di B dopo l' urto è altresì $\frac{MV}{M+m}$; onde la velocità totale del corpo elastico dopo l' urto è $\frac{2MV}{M+m}$.

Perchè $x = \frac{MV}{M+m}$, avremo $V - x = V - \frac{MV}{M+m} = \frac{MV + mV - MV}{M+m} = \frac{mV}{M+m}$: ma $V - x$ è la velocità, cui la forza elastica di A riceve nell' istante dell' urto; dunque questa forza di A agisce colla velocità $\frac{mV}{M+m}$. Ora, non potendo la stessa forza elastica stendersi dalla parte di B, la cui forza elasti-

ca

ca le refifte colla medefima forza, conviene di neceffità, che rifpinga A in una direzione contraria alla velocità $\frac{MV}{M+m}$: ma indipendentemente da effa velocità $\frac{MV}{M+m}$ è la velocità di A dopo l'urto; onde, a motivo della velocità contraria $\frac{mV}{M+m}$, la velocità del corpo elaftico A è $\frac{MV-mV}{M+m}$.

194. Se fupponiamo $M = m$, la velocità $\frac{2MV}{M+m}$ di B dopo l'urto farà $\frac{2MV}{2M} = V$, e la velocità $\frac{MV-mV}{M+m}$ di A farà $MV-MV = 0$; vale a dire, fe 'l corpo A è uguale a B, il corpo A dopo l'urto è in quiete, e B muovefi colla velocità di A prima dell'urto.

195. Se fupponiamo $M = 2m$, la velocità $\frac{2MV}{M+m}$ di B dopo l'urto farà $\frac{4mV}{3m} = \frac{4V}{3}$, e la velocità $\frac{MV-mV}{M+m}$ di A farà $\frac{2mV-mV}{3m} = \frac{mV}{3m} = \frac{1}{3}V$.

Parimente, fe fupponiamo $M = 3m$, la velocità $\frac{2MV}{M+m}$ di B dopo l'urto farà $\frac{6mV}{4m} = \frac{6}{4}V$, e la velocità $\frac{MV-mV}{M+m}$ farà $\frac{3mV-mV}{4m} = \frac{2mV}{4m} = \frac{2}{4}V$, e così in altri cafi; cioè, quando A è maggior di B, i due corpi dopo l'urto feguono la direzione di A prima dell'urto, e la fomma delle lor velocità è maggiore della velocità di A prima dell'urto.

196. All' incontro, fe fupponiamo $m = 2M$, la velocità $\frac{2MV}{M+m}$ di B dopo l'urto farà $\frac{2MV}{3M} = \frac{2}{3}V$, e la velocità $\frac{MV-mV}{M+m}$ di A farà $\frac{MV-2MV}{M+m} = \frac{-MV}{3M} - \frac{1}{3}V$; e confeguentemente, a motivo del fegno $-$, il corpo A ritornerà indietro con $\frac{1}{3}V$.

Così ancora, fe fupponiamo $m = 3M$, la velocità $\frac{2MV}{M+m}$ di B dopo

dopo l'urto farà $\frac{2MV}{M+3m} = \frac{2MV}{4M} = \frac{2}{4}V$, e la velocità $\frac{MV-mV}{M+m}$ di A farà $\frac{MV-3MV}{4M} = \frac{2MV}{4M} = -\frac{2}{4}V$, e per confeguente il corpo A ritornerà indietro con $\frac{2}{4}V$, e così in altri cafi; cioè, fe A è minor di B, il corpo A ritorna fempre indietro, e la fomma delle velocità dopo l'urto, prefe ciafcuna fecondo le lor direzioni, è uguale alla velocità di A prima dell'urto.

197. PROBLEMA. *Date le velocità di due corpi elaftici* A, B, *che fi muovono fecondo la fteffa direzione, ma di cui'l fecondo* B *ha minor velocità, conofcere le velocità dopo l'urto.*

Se i due corpi non foffero elaftici, la lor velocità comune dopo l'urto farebbe $\frac{MV+mu}{M+m}$ (*N.* 190.): ora la velocità, con cui A urta B, è $V - u$ (*N.* 191.), e quefta dee alle due forze elaftiche diftribuirfi reciprocamente alle maffe per le ragioni addotte nel precedente Problema; però chiamando x la parte di quefta velocità, che riceve la forza elaftica di B, ed $V - u - x$ quella, cui riceve la forza elaftica di A, avremo $x . V - u - x :: M . m$; dunque $mx = MV - Mu - Mx$ od $Mx + mx = MV - Mu$, dal che io deduco $x = \frac{MV-Mu}{M+m}$: così $\frac{MV-Mu}{M+m}$ è la velocità, cui riceve la forza elaftica di B. Ora, non potendo quefta forza ftenderfi dalla banda di A, la cui forza elaftica le refifte colla medefima forza, fa di meftiere, che fpinga B dall'altra parte colla velocità $\frac{MV-Mu}{M+m}$: ma independentemente dalla forza elaftica B è già fpinto da effa parte colla velocità $\frac{MV+Mu}{M+m}$; onde la velocità totale di B dopo l'urto è $\frac{MV+mu+MV-Mu}{M+m}$, e ciò riducefi a $\frac{2MV-Mu+mu}{M+m}$.

Ora, perchè $x = \frac{MV-Mu}{M+m}$; dunque $V - u - x = V - u - \frac{MV+Mu}{M+m} = \frac{MV-Mu+mV-mu-MV+Mu}{M+m} = \frac{mV-mu}{M+m}$: ma $V - u - x$ è la velocità, cui riceve la forza elaftica di A; onde

de questa velocità è $\frac{mV - mu}{M + m}$. Ora non può questa forza stendersi dalla parte di B, la cui forza elastica le resiste colla medesima forza; però egli conviene, che rispinga A in una direzione contraria a quella ch'avea colla velocità $\frac{mV - mu}{M + m}$: ma independentemente dalla forza elastica il corpo A dopo l'urto ha la velocità $\frac{MV + mu}{M + m}$; dunque da questa sottraendo quella, che la forza elastica le imprime in un verso opposto, la velocità di A dopo l'urto sarà $\frac{MV + mu - V + mu}{M + m}$, il che riducesi ad $\frac{MV - mV + 2mu}{M + m}$.

198. Se supponiamo $M = m$, la velocità $\frac{2MV - Mu + mu}{M + m}$ di B dopo l'urto sarà $\frac{2MV}{2M} = V$, e la velocità $\frac{MV - mV + 2mu}{M + m}$ sarà $\frac{2mu}{2m} = u$; cioè i due corpi dopo l'urto avranno cangiato le lor velocità prima dell'urto.

Parimente, se supponiamo $M = 2m$, la velocità $\frac{2MV - Mu + mu}{M + m}$ di B dopo l'urto sarà $\frac{4mV - 2mu + mu}{3m} = \frac{4mV - mu}{3m} = \frac{4}{3}V - \frac{1}{3}u$ e la velocità $\frac{MV - mV + 2mu}{M + m}$ di A sarà $\frac{2mV - mV + 2mu}{3m} = \frac{mV + 2mu}{3m} = \frac{1}{3}V + \frac{2}{3}u$, e con tal calcolo troveremo le velocità di A e B dopo l'urto secondo i differenti rapporti di M ad m, tanto se A segue la stessa direzione, come se è costretto di ritornare indietro; il che si conoscerà, quando 'l valore della sua velocità dopo l'urto sarà negativo.

199. **PROBLEMA.** *Date le velocità di due corpi elastici* A, B *che s'avvicinano l'uno all'altro con direzioni contrarie, ma il cui secondo* B *ha minor quantità di moto del primo, conoscer le loro velocità dopo l'urto.*

Se i due corpi non fossero elastici, la lor velocità comune dopo l'urto sarebbe $\frac{MV - mu}{M + m}$ (*N.* 190.): ora A urta B colla somma $V + u$ delle velocità prima dell'urto (*N.* 191.), e questa velocità si distribuisce alle due forze elastiche reciprocamente

alle

alle lor masse; onde chiamando x la porzione della velocità, cui riceve la forza elastica di B, ed $V + u - x$ la porzione, che riceve la forza elastica di A, avremo $x . V + u - x :: M . m$; però $xm = MV + Mu - Mx$, od $Mx + mx = MV + Mu$; dal che io deduco $x = \frac{MV + Mu}{M + m}$: così la forza elastica di B riceve la velocità $\frac{MV + Mu}{M + m}$. Ora, non potendo questa forza stendersi dalla banda di A, la cui forza elastica le resiste colla medesima forza, conviene di necessità, che spinga B dall' altra banda di A colla velocità $\frac{MV + Mu}{M + m}$: ma B independentemente dalla forza elastica ha ricevuto per l'urto di A la velocità $\frac{MV - mu}{M + m}$; dunque la velocità di B dopo l'urto è $\frac{MV - mu + MV + Mu}{M + m}$, e ciò riducesi a $\frac{2MV + Mu - mu}{M + m}$.

Perchè $x = \frac{MV + Mu}{M + m}$, noi avremo $V + u - x = V + u - \frac{MV - Mu}{M + m} = \frac{MV + Mu + mV + mu - MV - Mu}{M + m} = \frac{mV + mu}{M + m}$: ma $V + u - x$ è la velocità, cui riceve la forza elastica di A; onde questa velocità è $\frac{mV + mu}{M + m}$. Ora, non potendo questa forza stendersi dalla parte di B, la cui forza elastica le resiste, dee necessariamente rispigner' A in una direzione contraria alla velocità $\frac{mV + mu}{M + m}$: ma independentemente dalla forza elastica il corpo A dopo l' urto dee avere la velocità $\frac{MV - mu}{M + m}$ secondo la sua direzione; dunque da questa sottraendo la velocità opposta, che la forza elastica l'imprime, la sua velocità dopo l'urto sarà $\frac{MV - mu - mV - mu}{M + m} = \frac{MV - mV - 2mu}{M + m}$.

200. Se supponiamo $M = m$, la velocità $\frac{2MV + Mu - mu}{M + m}$ di B dopo l'urto sarà $\frac{2MV}{M + m} = V$, e la velocità $\frac{MV - mV - 2mu}{M + m}$

 di

di A sarà $- \frac{2mu}{2m} = - u$, cioè A tornerà indietro colla velocità di B prima dell'urto, e B seguirà la direzione di A colla velocità di A prima dell'urto: così amendue torneranno indietro colla lor velocità permutata; e con simil calcolo troveremo sempre le velocità dopo l'urto secondo i differenti rapporti di M ad *m*, facendo tuttavolta osservazione, che se vogliamo supporre *m* maggior di M, dee quest' ipotesi esser tale, che la quantità di B prima dell'urto sia minore della quantità di moto MV di A prima dell'urto, secondo ciò che s'è dichiarato nel Problema.

201. PROPOSIZIONE XXVIII. *Se due corpi* A, B *d' uguali masse urtansi con velocità eguali, e direttamente opposte, ciascuno dopo l' urto tornerà indietro colla propria velocità.*

Se i due corpi non fossero elastici, il lor moto dopo l'urto cesserebbe (*N.* 182.), perocchè supponesi, che le loro forze sieno eguali: ora facendosi l'urto colla somma V + V delle velocità (*N.* 191.), questa somma sarà 2V, e siccome 2V dee distribuirsi alle due forze elastiche reciprocamente alle masse, che si suppongono eguali, ogni forza elastica riceverà la velocità V: ma non potendo la forza elastica di A stendersi dalla parte di B, la cui forza elastica le resiste colla medesima forza, rispignerà A dall' altra parte colla velocità V, e per la stessa ragione la forza elastica di B rispignerà B dal lato opposto ad A colla velocità V; onde questi due corpi torneranno indietro colle velocità, ch' essi aveano prima dell'urto.

203. PROPOSIZIONE XXIX. *Se un corpo* A *elastico urta un' altro corpo elastico* B, *ch' invincibilmente ad esso resiste, il corpo* A *dopo l' urto torna indietro colla stessa velocità, ch' avea prima.*

Se A e B non fossero elastici, il moto di A dopo l'urto cesserebbe (*N.* 179.): ora, essendo la resistenza, che 'l corpo B oppone ad A, uguale alla forza del corpo A, ch' è MV, possiamo considerare i due corpi A, B come aventi masse eguali, ma di cui l'uno sia trattenuto da un' ostacolo insuperabile; così facendosi l'urto colla velocità V, e questa distribuendosi alle due forze reciprocamente alle lor masse, ogni forza elastica ricever dee $\frac{1}{2}$V di velocità. Ora la forza elastica di A, non potendosi stender dalla parte di B, rispigne il corpo A dal lato opposto con $\frac{1}{2}$V, e nel tempo stesso la forza elastica di B, la quale non può assolutamente stendersi dal lato di B, rispigne il corpo A

con

con $\frac{1}{2}$V; dunque il corpo A rispinto con $\frac{1}{2}$V + $\frac{1}{2}$ = V dee tornar' indietro colla velocità di prima, ovvero ancora si può dire, che trovando quivi le due forze elastiche una resistenza invincibile dalla parte di B, e niuna trovandone da quella di A, procurar debbono di stendersi da quella parte, ed in conseguenza rispignere il corpo A con $\frac{1}{2}$V + $\frac{1}{2}$V = V.

204. PROPOSIZIONE XXX. 1°. *Se due corpi* A, B, *urtandosi, seguono la stessa direzione avanti e dopo l' urto, la quantità di moto prima dell' urto è uguale alla quantità di moto dopo l' urto.*

2° *Se essi hanno direzioni contrarie avanti e dopo l' urto, la differenza delle quantità di moto è la stessa così avanti l' urto come dopo.*

3° *Se poi hanno direzioni contrarie avanti l' urto, e la stessa direzione dopo, la somma delle quantità di moto dopo l' urto è uguale alla differenza delle quantità di moto prima dell' urto.*

4°. *Finalmonte, se hanno la stessa direzione avanti l' urto, e delle direzioni contrarie dopo, la differenza delle quantità di moto dopo l' urto è uguale alla somma delle quantità di moto prima dell' urto.*

Nel primo caso, la somma delle qnantità di moto prima dell' urto è $MV + mu$, e la velocità di A dopo l' urto è $\frac{MV - mV + 2mu}{M+m}$ (*N.* 197.); onde la sua quantità di moto sarà $\frac{MMV - MmV + 2Mmu}{M+m}$. Così pure, la velocità di B dopo l' urto è $\frac{2MV - Mu + mu}{M+m}$, e la sua quantità di moto $\frac{2mMV - mMV + mmu}{M+m}$; dunque sommando insieme le due quantità di moto di A, e B dopo l' urto, la somma sarà $\frac{MMV - MmV + 2Mmu + 2mMV - mMV + mmu}{M+m}$ $= \frac{MMV + mMV + Mmu + mmu}{M+m} = MV + mu$: ma $MV + mu$ è la quantità di moto prima dell' urto; però le quantità di moto son' uguali avanti e dopo l' urto.

Nel secondo caso la differenza delle quantità di moto prima dell' urto è $MV - mu$: ora, il corpo A dopo l' urto torna indietro; dunque la sua velocità dopo l' urto, la qual è $\frac{MV - mV - 2mu}{M+m}$ (*N.* 199.), diventa negativa, ed è in conseguenza $-\frac{MV + mV + 2mu}{M+m}$, e la sua quantità di moto è

MMV

$\frac{MMV+MmV+2Mmu}{M+m}$; la velocità di B dopo l' urto è $\frac{2MV+Mu-mu}{M+m}$, e la sua quantità di moto è $\frac{2mMV+mMu-mmu}{M+m}$; quindi sottraendo la quantità di moto di A dopo l'urto dalla quantità di moto di B dopo l' urto, la lor differenza sarà $\frac{2mMV + mMV - mmu + MMV - Mmu - 2MmV}{M+m} = \frac{MMV+mMV-mMu-mmu}{M+m} = MV - mu$: ma questa differenza è la stessa della differenza $MV - mu$ delle quantità di moto prima dell'urto; però ec.

E con somiglianti calcoli facilmente troveremo la verità degli altri due casi.

205. AVVERTIMENTO. Dunque sempre non v'è la medesima quantità di moto avanti e dopo l'urto, e pare in conseguenza, che a torto i Cartesiani ci voglian far credere l' opposto: ma conviene avvertire, ch' essi non prendono per quantità di moto se non quella, che resta secondo la direzione del corpo A il quale avea la maggior quantità di moto prima dell'urto, dopo sottratta la quantità di moto ad essa opposta. Così gli stessi chiamano quantità di moto, ciò che da noi s'appella, differenza di dette quantità, e però e'dicon lo stesso di noi. Nel resto il loro modo di esprimersi e considerar le cose è talvolta utile.

206. PROPOSIZIONE XXXI. *Nell' urto di due corpi elastici, la somma dei prodotti delle masse per i quadrati delle loro velocità avanti l' urto equivale alla somma de' prodotti delle masse per i quadri delle lor velocità dopo l' urto.*

Se i corpi A e B hanno la stessa direzione avanti e dopo l'urto, la velocità di A dopo l'urto è $\frac{MV-mV+2mu}{M+m}$ (*N.*197.); onde il suo quadrato è $\frac{M^2V^2-2MmVV+m^2V^2+4mMVu-4mmVu+4m^2u^2}{M^2+2mM+mm}$;

e moltiplicando questo quadrato per la sua massa, avremo $\frac{M^3V^2 - 2M^2mVV + Mm^2V^2+4M^2mVu - 4Mm^2Vu + 4Mm^2u^2}{M^2+2mM+mm}$.

Parimente, la velocità di B dopo l'urto è $\frac{2MV-Mu+mu}{M+m}$ (*N.*197.),

(*N.* 197.), e 'l ſuo quadro moltiplicato per la maſſa m è

$$\frac{4M^2V^2m - 4M^2Vum + M^2u^2m + 4MmmVu - 2Mmmuu + m^3u^2}{M^2 + 2Mm + mm};$$

onde ſommando inſieme queſti due quadri delle velocità dopo l' urto moltiplicati per le lor maſſe, avremo

$$\frac{M^3V^2 + 2M^2mV^2 + Mm^2V^2 + M^2u^2m + 2Mm^2u^2}{M^2 + 2Mm + mm} + m^3u^2 = MV^2 + mu^2:$$

ma $MV^2 + mu^2$ equivale alla ſomma de' quadri delle velocità prima dell' urto moltiplicati per le maſſe; dunque queſta ſomma è uguale a quella de' quadri delle velocità dopo l' urto moltiplicati per le lor maſſe.

Lo ſteſſo noi proveremo in tutti gli altri caſi, avvertendo, che ſe in alcuno di eſſi il corpo A dopo l'urto torna indietro, la ſua velocità dopo l'urto diventa negativa, e in conſeguenza, prima di fare il ſuo quadrato, conviene rendere negativa la ſua eſpreſſione, cangiando i ſegni + e —.

Queſta Propoſizione è pur vera, anche quando l' uno de' corpi B è in quiete prima del moto, e ciò è facile a verificarſi.

207. AVVERTIMENTO. I partigiani delle forze *vive* han quivi preſo occaſione di ſoſtenere, le forze de' corpi elaſtici, che s' urtano, eſſer fra loro come i quadri delle velocità moltiplicate per le maſſe; imperocchè eſſi dicono, che le forze ſono fra ſe come gli effetti dalle medeſime prodotti: ora nell'urto de' corpi i prodotti delle maſſe per i quadrati delle velocità avanti l' urto ſono uguali ai prodotti delle maſſe per i quadri delle velocità dopo l' urto; dunque le forze dopo l' urto eſſer debbono parimente uguali alle forze avanti l'urto, e per conſeguenza debbono eſſere in ragione de' prodotti delle maſſe per i quadri delle velocità. Ma biſogna avvertire, che queſt' effetto non ſia interamente prodotto dalla forza motrice de' corpi; avvegnachè, ſe ciò foſſe, lo ſteſſo dovrebbe ſuccedere nell'urto de' corpi non elaſtici, il ch'è falſo; ed in conſeguenza egli è cauſato parte dalla forza motrice, e parte dall' elaſtica, la quale punto non deriva dalla forza motrice. Così queſta proprietà dell' urto de' corpi elaſtici non favoriſce in parte alcuna le forze vive.

208. PROPOSIZIONE XXXII. *Se un corpo* A *elaſtico* (Fig. 52.) *urta un' altro corpo elaſtico* B *maggior di eſſo ed in quiete, e che queſte pel moto dall' urto impreſſogli vada ad urtare un' altro corpo elaſtico* C *maggior pure di eſſo ed in quiete, la velocità, che 'l corpo* C *riceverà dall' urto di* B, *ſarà maggior di quella, ch' avrebbe ricevuto,*

ſe

se A *l' avesse urtato colla medesima velocità, con cui egli ha urtato* B; *e lo stesso ancora avverrebbe, se* B *fosse minore di* A, *e* C *minor di* B.

Chiamisi L la velocità di A; S quella, che B riceve dall'urto di A; R la velocità, cui C riceve dall'urto di B, e T quella, che C riceverebbe, se A l'urtasse immediatamente. La velocità, che A comunica a B, è $\frac{2AL}{A+B}$, cioè 'l doppio della quantità di moto di A diviso per la somma delle masse A, B (*N.* 193.); dunque $\frac{2AL}{A+B} = S$, e però $2AL = S \times \overline{A+B}$; dal che io deduco 2L. S : : A + B. A: così ancora la velocità, che B imprime al corpo C, è $\frac{2BS}{B+C}$, e per conseguente $\frac{2BS}{B+C} = R$, ovvero $2BS = R \times \overline{B+C}$; e quindi io inferisco S. R : : B + C. 2B: ma 2L è ad R in ragion composta della ragione di 2L ad S, e di quella di S ad R; onde 2L è ad R in ragion composta delle ragioni A + B. A, e B + C, 2B, cioè 2L. R : : $\overline{A+B} \times \overline{B+C}$. A × 2B.

Parimente la velocità, che 'l corpo A imprimerebbe a C se l'urtasse immediatamente, è $\frac{2AL}{A+C}$; dunque $\frac{2AL}{A+C} = T$, ovvero $2AL = T \times \overline{A+C}$; dal che io deduco 2L. T : : A + C. A. Altro dunque non si tratta di far vedere se non che 2L è minor rispetto ad R di quello sia rispetto a T, e ch' in conseguenza R è maggior di T; il che io faccio in questo modo.

Piglio tre linee MN, NP, PQ, che sieno fra loro come le masse A, B, C, ed ho in conseguenza MN + NP, od MP. MN : : A + B. A; dunque 2L. S : : MP. MN : similmente, io ho NP + PQ, od NQ. 2NP : : B + C. 2B; onde S. R : : NQ. 2NP; e perchè 2L è ad R in ragion composta della ragione di 2L ad S, e di quella di S ad R, ovvero delle ragioni MP. MN, ed NQ. 2NP, abbiamo 2L. R : : MP × NQ. MN × 2NP.

In N io alzo la perpendicolare ND, cui faccio uguale ad MP, e termino il rettangolo DEQN uguale ad MP × NQ; sopra DH io piglio la parte HN = NP, e per conseguenza DH = MN. Dal punto H tiro HY parallela ad NQ, e dal punto P la retta

PZ

PZ parallela ad ND, e 'l rettangolo HDZX è uguale ad MN × NP : così noi abbiamo 2L. R : : NDEQ. 2HDZX.

Parimente MN + PQ. MN : : A + C. A, e moltiplicando i due primi termini per l'altezza comune NP si ha MN × NP + PQ × NP. MN × NP : : A + C. A. Ora noi abbiamo 2L. T : : A + C. A ; dunque 2L. T :: MN × NP + PQ × NP. MO × NP : ma MN × NP = HDZX, e PQ × NP = PQYX ; onde 2L. T : : HDZX + PQYX. HDZX, ovvero, facendo'l doppio de' due ultimi termini, 2L. T : : 2HDZX + 2PQYX. 2HDZX.

Ora 2HDZX + 2PQYX è maggiore di NDEQ ; perocchè facendo HV = DH, e dal punto V tirando la retta VG parallela ad NQ, il rettangolo PIGQ sarà maggiore del rettangolo PIVN a motivo di PQ maggior di NP ; dunque 2HDZX non sarà minore di NDZP che della quantità NVIP, e all'opposto 2PQYX sarà maggior di PZEQ di tutta la quantità PIGQ maggiore di NVIP ; perciò 2HDZX + 2PQYX sarà maggior di NDEQ, e in conseguenza 2HDZX + 2PQVX sarà maggiore rispetto a 2HDZX di quello sia NDEQ rispetto allo stesso 2HDZX ; onde anche 2L sarà maggiore rapporto a T, che 2L rapporto ad R, e però la velocità R sarà maggior della velocità T.

Ciò si dimostrerebbe nello stesso modo, se B fosse minore di A, e C minor di B.

209. Quindi ne segue, che se si ponessero più corpi infra A e C, tal che tutti andassero crescendo, o diminuendo da A fino a C, potrebbesi di molto accrescer la velocità di C.

210. LEMMA. *Se a tre linee* AB, AC, AD (Fig. 53.), *che sono in proporzione Geometrica continua, aggiugnesi una medesima quantità* AE, *dico ; che'l rettangolo* EB × ED *degli estremi* EB, ED *è maggiore del quadrato della media* EC.

Faccio'l quadro EFGC della media EC, e'l rettangolo ELMD degli estremi EB, ED : ora, per ipotesi, essendo le tre linee AB, AC, AD in proporzione continua, il quadro di AC sarà uguale al rettangolo AB × AD ; onde dal quadrato EFGC togliendo il quadro AHSC della retta AC, e dal rettangolo ELMD il rettangolo APQD uguale al rettangolo AB × AD, da una parte resterà il gnomone EFGSHA, e dall'altra il gnomone ELMQPA.

Ora, a motivo di EL = EB, e di AB = AP, od ET, noi abbiamo TL = EA : similmente, a motivo di EF = EC, e di AH, od ER = AC, abbiamo RF = EA, e per conseguenza

RF = TL; pigliando dunque LX = FG, e dal punto X tirando VX parallela a TL, il rettangolo RFGS sarà uguale al rettangolo TLVX. Così dal gnomone EFGSHA levando il rettangolo RFGS, e dal gnomone ELMQPA il rettangolo TLVX, resterà da una parte il rettangolo RHAE, e dall'altra il rettangolo EATP, più'l rettangolo VXQM.

Faccio AZ = AP, e tirando ZY parallela ad EA ho'l rettangolo YZAE uguale al rettangolo EAPT; dunque dal rettangolo RHAE levando'l rettangolo YZAE, e dai due EATP + VXQM il rettangolo EATP, resterà da una parte RHZY, e dall' altra VXMQ: ora questi due rettangoli rimanenti, avendo una dimensione uguale RH = VX, sono fra loro come HZ ad VR, e in conseguenza, se dimostro HZ esser minore di VQ, avrò pure dimostrato il rettangolo RHZY minore del rettangolo VXMQ, ed EFGC minor di ELMD.

Ora, a motivo di AH = AC, e di AZ = AP, od AB, abbiam ZH = BC, e dall' altro lato VQ = CD: ma a cagione delle tre linee AD, AC, AB in proporzione abbiamo AD—AC. AC : : AC — AB. AB, ovvero CD. AC : : CB. AB, o pure CD. CB : : AC. AB: ma AC è maggiore di AB; dunque CD, od VQ è maggior di CB, o ZH; e però VQMX è maggiore di HZYR; dond'egli è facile a conchiudere, che'l quadro EFGC è minor del rettangolo ELMD, poichè, dopo sottrarre d'ambe le parti cose uguali, il residuo HZYR è minore del residuo XMQV.

211. PROPOSIZIONE XXXIII. *Se tre corpi elastici* A, B, C (Fig. 54.) *sono in proporzione Geometrica continua, la quale vada o crescendo, o diminuendo, e che dopo avere* A *urtato* B, *il qual' era in quiete, vada questo ad urtare il corpo* C *parimente in quiete, dico, che la velocità, cui* C *riceve da* B, *è maggior di quella che ricever potrebbe, se in vece di* B *si ponesse un' altro corpo* H *maggiore, o minor di* B, *il quale, dopo essere stato urtato da* A, *venisse ad urtarlo.*

Chiamo L la velocità di A; S la velocità, che B riceve da A, ed R quella, cui C riceve da B. Prendo tre linee MN, NP, PQ, le quali sieno fra loro come i tre corpi A, B, C, e per lo precedente Problema avremo 2L ad R in ragion composta delle ragioni MP, MN, ed NQ, 2NP: ora, a motivo di PQ. NP : : NP. MN, abbiamo PQ + NP. NP : : NP + MN. MN, ovvero NQ. NP : : MP. MN, e facendo

cendo 'l doppio dei conseguenti, avremo NQ . 2NP : : MP . 2MN; onde essendo 2L ad R in ragion composta della ragione MP, MN, e della ragione NQ, 2NP, ch' è la stessa della ragione MP, 2MN, abbiamo 2L ad R in ragion composta delle ragioni MP, MN, ed MP, 2MN; ed in conseguenza 2L . R : : $\overline{MP}^2 . 2\overline{MN}^2$.

Ora, in vece di B mettasi un'altro corpo X maggior di B, e chiamisi H la velocità, che questo corpo in quiete riceverà da A, e Z quella, che 'l corpo X imprimerà a C; piglio una linea NF, la quale sia ad MN, come X ad A, e quindi una terza proporzionale NV ad NF ed NP. Ciò fatto.

La velocità, che A imprimerà ad X sarà $\frac{2AL}{A+X}$ (*N.* 193.); dunque $\frac{2AL}{A+X} = H$, ovvero $2AL = H \times \overline{A+X}$; dal che io deduco 2L . H : : A + X . A: ma A . X : : MN . NF; dunque A + X . A : : MN + NF . MN : : MF . MN; e in conseguenza 2L . H : : MF . MN.

La velocità, ch' X imprime a C, è $\frac{2HX}{X+C}$; onde $\frac{2HX}{X+C} = Z$, e $2HX = Z \times \overline{X+C}$; dal che io inferisco H . Z : : X + C . 2X: ma perchè abbiamo A . X : : MN . NF, ovvero A . MN : : X . NF, ed A . C : : MN . PQ, o sia A . MN : : C . PQ, avremo ancora X . NF : : C . PQ, od X . C : : NF . PQ, e però X + C . X : : NF + PQ . NF; e facendo 'l doppio dei conseguenti, X + C . 2X : : NF + PQ . 2NF; dunque H . Z : : NF + PQ . 2NF.

Ora 2L è a Z in ragion composta della ragione di 2L ad H, e di quella di H a Z; dunque 2L è a Z in ragion composta delle ragioni MF, MN, ed NF + PQ, 2NF.

Ma essendo le tre linee MN, NP, PQ in proporzione continua, abbiamo $MN \times PQ = \overline{NP}^2$, e a motivo delle tre linee in proporzione continua NV, NP, NF abbiamo $NV \times NF = \overline{NP}^2$; onde $MN \times PQ = NV \times NF$, dal che io deduco NV . MN : : PQ . NF, e componendo, abbiamo NV + MN, od MV . MN : : PQ + NF . NF, e facendo 'l doppio dei conseguenti, avremo MV . 2MN : : PQ + NF . 2NF. Perchè dunque s' è

trovato, che 2L è a Z in ragion composta di MF, MN, e di NF + PQ, 2NF, ne segue, che 2L è a Z in ragion composta di MF, MN, e di MV. 2MN; e per conseguente 2L. Z :: MF × MV. $2\overline{MN}^2$, e $2L \times 2\overline{MN}^2 = Z \times \overline{MF \times MV}$: ma egli s'è ritrovato 2L. R :: $\overline{MP}^2 . 2\overline{MN}^2$, il che ci dà $2L \times 2\overline{MN}^2 = R \times \overline{MP}^2$; però $Z \times MF \times MV = R \times \overline{MP}^2$, dal che io inferisco Z. R :: $\overline{MP}^2$. MF × MV: ora, a motivo delle tre linee in proporzione continua NV, NP, NF, e della retta MN giunta a ciascuna d'esse, abbiamo $\overline{MP}^2$ minor di MF × MV pel Lemma precedente; onde la velocità Z, che 'l corpo X imprimerebbe a C, è minor di quella, che C riceve da B.

Lo stesso ancora si proverebbe, se in vece di B e'si mettesse un' altro corpo minor di esso.

Dell' Urto obbliquo de' Corpi.

212. Due corpi urtansi direttamente, quando le lor direzioni passano pe' loro centri. Se, p. e. il corpo A (*Fig.* 55.) muovesi verso B lungo la linea AB, che passa per i due centri di A e B, i due corpi urtansi direttamente. Quello, che sopra s'è detto circa l'urto de' corpi, dee pure intendersi di quest' urto diretto.

213. Due corpi s' urtano obbliquamente, quando le lor direzioni non passono pe' loro centri. Se, p. e. il corpo A (*Fig.* 56.) muovesi verso 'l corpo C secondo la linea AD, che non passa pel centro C, l'urto sarà obbliquo: così ancora, se i due corpi A, B (*Fig.* 57.) muovonsi secondo le direzioni AD, BD, le quali non passano entrambe per i due centri, l'urto di questi corpi, quando s'incontreranno, sarà obbliquo.

214. Quando i corpi sono sferici, l'obbliquità dell' urto si misura mediante l'angolo formato dalla direzione colla tangente al punto, in cui si fa l' urto. Supponiamo, p. e. che 'l corpo sferico A (*Fig.* 56.) vada ad urtare il corpo sferico B secondo la direzione AD, la quale non passa pel centro C, e che l'urto si faccia in R: tiro da R una tangente, o piuttosto un piano tangente MS, e l'angolo formato dalla direzione AR con questo piano è la misura dell' obbliquità dell' urto.

215. PROBLEMA. *Determinar ciò che succede nell' urto obbliquo de' corpi non elastici.*

Pri-

Primieramente, se 'l corpo A (*Fig.*58.) va ad urtare il corpo immobil B, concepisco un piano tangente in R, ove si fa l'urto; quindi obbliqua essendo la direzione AC a detto piano, dal punto A abbasso la perpendicolare AR, e terminando il parallelogrammo ARCH, la forza AC è composta delle forze AR, ed AH: ma la forza AR urta direttamente il piano, e in conseguenza anche la sfera B, e la forza AH non l' urta, perch'è parallela ad RC; onde dopo l'urto la forza AR sarà distrutta, e resterà solo la forza AH; però il corpo A dopo l' urto continuerà a muoversi colla forza AH secondo la direzione CD parallela ad AH.

Secondariamente, se i corpi A, B (*Fig.* 59.) urtansi con direzioni MA, LB, e con velocità espresse dalle rette MA, LB, concepisco, che per i centri A, B passino de' piani NR, HV paralleli al piano tangente CD. Da M abbasso la perpendicolare MN sul piano NR, e terminando il parallelogrammo MPAN, la velocità MA è composta della velocità perpendicolare MN, e della velocità MP. Parimente, dal punto L abbasso la perpendicolare LH sul piano HV, e terminando il parallelogrammo HBEL, la velocità LB è composta della velocità perpendicolare HL, e della velocità LE: ora parallele essendo le velocità MP, LE, esse punto non agiscono l'una sopra l' altra; così li corpi non s'avvicinano che colle velocità MN, HL; dunque il più forte delli due distruggerà la velocità del più debole, e lo condurrà seco giusta la sua direzione con una velocità, che lor sarà comune (*N.* 181.). Supponiamo, che questa velocità sia espressa dalla retta AS: il corpo A spinto da detta velocità AS, e dalla velocità NA, la quale sempre agisce sopra di lui, dopo l'urto prenderà la direzione della diagonale AQ del parallelogrammo AQ formato da queste due velocità; e 'l corpo B, spinto dalla velocità BT uguale ad AS, e dalla velocità HB, prenderà dopo l'urto la direzione della diagonale BX del parallellogrammo BX formato da queste due velocità. Noi troveremo nello stesso modo cosa debba accadere in tutti gli altri casi dell' urto obbliquo de' corpi non elastici.

216. PROPOSIZIONE XXXIV. *Se un corpo* A *elastico* (Fig.60.) *urta con una direzione obbliqua* AD *un' altro corpo elastico ed immobil* BC, *dopo l' urto ei tornerà indietro, facendo l' angolo di riflessione* PDC *uguale a quello d' incidenza* ADB.

Supponiamo, che la velocità di A sia espressa dalla direzione AD; dal punto A io abbasso sopra BC la perpendicolare AH, e ter-

terminando 'l parallelogrammo AHDE, la velocità AD è composta della velocità perpendicolare AH, e della velocità AE parallela al corpo BC: in tal modo A non urta BC se non se colla velocità AH, e siccom' egli non può smuovere il corpo B, così dee tornar'indietro colla medesima velocità AH, o sia DE (*N.* 203.). Ora la velocità AE sempre agisce sopra di lui, e lo spigne verso Q; onde facendo DC = AE, e terminando il parallelogrammo DCPE composto delle due velocità DE, DC, il corpo A prenderà la direzione della diagonale DP. Dunque il triangolo rettangolo DPC sarà simile ed uguale al triangolo rettangolo DAH, a motivo di EC = DH, e di CP = AH; e conseguentemente l'angolo di riflessione PDC sarà uguale a quello d'incidenza ADH.

217. PROBLEMA. *Determinar cosa debba accadere nell' urto obbliquo di due corpi elastici, quando niuno di essi resista invincibilmente.*

Supponiamo prima, che 'l corpo A (*Fig. 61.*) con una velocità AR vada ad urtare obliquamente il corpo B, ad esso uguale, e che i due corpi sieno sferici. In R, ove si fa l'urto, concepisco un piano ST, che tocchi 'l corpo B; dal punto A io abbasso la perpendicolare AS su detto piano, e terminando 'l parallelogrammo AMRS, la velocità è composta della velocità perpendicolare AS, e della velocità AM, che parallela essendo ad ST non può agire sopra B. Così A urta direttamente B colla velocità AS, od MR; onde per l' egualità delle masse il corpo B dopo l' urto muovesi secondo la direzione RQ colla velocità MR (*N.* 194.), ed A dee essere in quiete secondo questa stessa direzione: ma siccom' egli è sempre spinto dalla velocità AM, così dopo l' urto ei dee prender la direzione RT parallela ad AM colla velocità AM.

2°. Se supponiamo, che 'l corpo A (*Fig. 62.*) con una velocità MA urti obbliquamente il corpo B minor di esso, ed in quiete, concepisco, che pel centro A passi un piano NQ parallelo al piano tangente ST. Dal punto M io abbasso MN perpendicolare a detto piano, e terminando 'l parallelogrammo MNAE, la velocità MA è composta della velocità perpendicolare MN, e della velocità ME, che parallela essendo al piano tangente ST non può agire sopra B: così A non agisce sopra B che colla sola velocità MN, od EA; e perchè B è minor di A, troveremo, per le regole stabilite sopra(*N.* 195.), che dopo l' urto il corpo B avrà una velocità secondo la direzione EA maggiore della velocità di A giusto questa stessa direzione. Posto dunque, che la velocità di B sia espressa dalla retta BH, e quella

la di A dalla retta AX, il corpo B prenderà la direzione BH, ch'è la stessa di EA colla velocità BH: ma il corpo A spinto dalla velocità AX, e dalla velocità ME, od AQ sua eguale, ch' agisce sopra di lui, prenderà la direzione della diagonale AV del parallelogrammo AV composto delle due velocità, e sarà la sua velocità espressa dalla retta AV. Nella stessa guisa noi troveremo cosa debba avvenire in tutti gli altri casi dell' urto obbliquo de' corpi elastici.

Dell' urto delle Bombe ne' Corpi, ch' esse incontrano, e de' loro affondamenti nel Terreno.

218. Se una Bomba A (*Fig. 63.*) tirata con una direzione obbliqua AB descrive una parabola ALC, e che dopo divisa la sua direzione AB in parti uguali AE, EF, ec. s'abbassino da' punti di divisione delle perpendicolari EM, FN, ec. sopra l'ampiezza AC, egli è manifesto, che quest' ampiezza sarà divisa in uno stesso numero di parti eguali, e che gli archi parabolici AH, HL, ec. segati da queste perpendicolari, saran dalla bomba descritti in tempi uguali a quei, che la bomba impiegherebbe a scorrere le rette AE, EC, ec. sopra la sua direzione, se la gravità non l' abbassasse: avendo già dimostrato, che quando la bomba dovrebbe esser' in E, la gravità talmente l'abbassa, che trovasi in H; che quando la bomba esser dovrebbe in F, la gravità fa, che trovisi in L, ec. ora le parti eguali AE, EF sarebbero scorse in tempi eguali, per essere uniforme il moto della direzione AB; onde anche gli archi AH, HL, ec. sono scorsi in tempi eguali.

Supposto dunque, che le divisioni della direzione AB sieno infinitamente prossime, anche gli archetti AH, HL, ec. saranno infinitamente piccioli, e si potran considerare come picciole rette linee componenti la curva parabolica, e che prolungate diverebbero tangenti della curva; onde noi possiamo considerar la bomba quasi scorrente in tempi uguali delle picciole rette, le quali son nella direzione delle tangenti, e per conseguenza in qualunque punto della parabola trovisi la bomba, essa è nella direzione della tangente a detto punto.

219. *Una stessa parabola* ARC *non può esser descritta da due velocità differenti, cominciando da un medesimo punto* A.

Divido la direzione AB in parti eguali AE, EF, ec. rappresentanti gli spazj eguali, che dalla bomba sarebbero scorsi sopra questa

questa direzione in tempi eguali, se la gravità non l' abbassasse: però nel primo tempo la bomba scorrerebbe AE, ne' due primi ella scorrerebbe AF, nei tre primi AT, e così a mano a mano; e gli abbassmenti EH, LF, ec. cagionati dalla gravità in fine del primo tempo, de' due primi, de' tre primi, ec. sono fra loro come i quadri di questi tempi, o come i quadrati degli spazj AE, AF, AT. ec

Ora supponiamo, ch' una bomba eguale alla prima sia tirata dallo stesso punto A colla medesima direzione, ma con minor velocità; i tempi, che da essa saranno impiegati a scorrere gli spazj AE, AF, AT, ec. saran dunque più lunghi, ed in conseguenza l' abbassamento EO, cagionato dalla gravità in fine del primo tempo AE, sarà più lungo dell' abbassamento EH, perocchè la gravità avrà agito in un tempo più lungo: ora quest' abbassamento EO sarà all' abbassamento FV cagionato dalla gravità in fine de' due primi tempi, come 'l quadro di AE a quello di AF, o come l' abbassamento EH all' abbassamento FL; onde facendo EH. FL : : EO. FV, avremo FV maggior di FL, a motivo di EO maggiore di EH; e con somigliante raziocinio troveremo, che tutti gli altri abbassamenti saran maggiori degli abbassamenti TS, ec. dunque la bomba tirata con questa seconda velocità descriverà una parabola, la quale non sarà simile alla parabola ARC, ma vi passerà per di sotto.

Nello stesso modo noi proveremo, che se la bomba fosse tirata con una velocità maggiore, ella spenderebbe minor tempo a scorrere gli spazj AE, AF, ec. e ch' in conseguenza, diventando gli abbassamenti in fine di detti tempi meno lunghi, la parabola da essa descritta passerebbe di sopra della parabola ARC.

Nel resto io ho detto, che non poteasi con due differenti velocità descriver la stessa parabola cominciando da un medesimo punto A; manifesto essendo, ch'una bomba tirata orizzontalmente al vertice R scorrerebbe con una velocità differente la stessa parabola RA (*N.* 131.).

220. PROPOSIZIONE XXXV. *Se una bomba* A (Fig. 64.) *tirata obbliquamente all' orizzonte urta nel suo corso, ascendendo, o discendendo, un piano orizzontale, essa l' urta colla velocità, ch' avrebbe acquistata, se caduta fosse pel suo proprio peso da un' altezza* BR *uguale alla distanza che trovasi fra 'l punto* B *della parabola, in cui ella si ritrova quando urta 'l piano, e la tangente* CR *al vertice della parabola, cui essa descrive.*

Giunta

Giunta che sia la bomba in B, la sua forza è uguale alla forza d'una bomba d'egual peso, che sarebbe da B tirata secondo la direzione della tangente BL al punto B, e che descriverebbe la parabola restante BCH, non potendo questa parabola BC esser descritta da due differenti velocità (*N.* 219.) : ma questa forza farebbe alla bomba descriver la tangente BL in un tempo uguale a quello, ch'essa spende a scorrere l' arco BC; onde tirando l' ordinata BE, e terminando 'l parallelogrammo BECL, la forza BL è composta delle due BE, BS, l'una delle quali farebbe alla bomba scorrer la linea orizzontale BE, e l'altra la verticale BS in un tempo uguale a quello, che la forza composta BL impiegherebbe a farle scorrere lo spazio BL: ma la velocità verticale BS è uguale alla velocità, cui la bomba avrebbe acquistata, se pel suo proprio peso caduta fosse dalla metà RB dell'altezza SB, avendosi dimostrato (*N.* 104.), che questa velocità acquistata farebbe scorrer'uno spazio doppio dell'altezza RB; dunque, non potendo la bomba urtare il piano orizzontale posto in B se non colla sua velocità verticale, mercè che l' orizzontale BE è parallela a questo piano, essa l'urta colla velocità, ch' avrebbe acquistata, se fosse caduta dall'altezza BR.

Per dimostrare, che la bomba discendendo urta un piano orizzontale, p. e. in P, con una velocità uguale a quella da essa acquistata cadendo dall' altezza NP, basta osservare, che quando la bomba è giunta al vertice C della parabola, la sua fora equivale a quella d' una bomba d' ugual peso, che da C sarebbe tirata con una direzione orizzontale CN, e che descriverebbe la semiparabola CPH, non potendo questa semiparabola esser descritta da due differenti forze. Ora nel tempo, in cui questa forza farebbe sopra la linea orizzontale descrivere la retta CN, la gravità fa discender la bomba da un'altezza verticale NP, e'l corpo orizzontale posto in P non è urtato se non da questo moto verticale, perocchè il moto orizzontale CN gli è parallelo; onde questo corpo è urtato colla velocità acquistata dalla caduta NP.

221. COROLLARIO. Quindi ne segue 1°. ch' una bomba colpisce con egual forza un piano orizzontale nell' uscire A dal mortajo come nel fine H della sua ampiezza, per essere le distanze AO, HX uguali: 2°. ch' ella colpisce egualmente sì ascendendo, che discendendo, quando i punti B, P, ne'quali essa colpisce, sono equidistanti dal vertice A: 3°. in fine, che le for-

ze, con cui ella percuote ne' punti A, B disugualmente lontani dal vertice, sono fra loro come le radici delle distanze AO, BR, essendo queste forze come le velocità acquistate dalle cadute OA, RB; e dette velocità son come le radici di quest' altezze per le regole del moto accelerato.

222. PROPOSIZIONE XXXVI. *Se una bomba* A (Fig. 65.) *tirata obbliquamente all' orizzonte urta durante 'l suo corso, ascendendo, o discendendo, un piano* ED *perpendicolare alla sua direzione, cioè alla tangente* BL, *che passa pel punto dell' urto, la velocità, con cui essa urta detto piano, equivale alla velocità, ch' avrebbe acquistata, se caduta fosse dall' altezza del quarto del parametro del diametro, che passa pel punto* B, *in cui e' si fa l'urto.*

Giunta che sia la bomba in B, la sua forza equivale a quella d' una bomba d' ugual peso, che sarebbe dal punto B tirata colla direzione BL, e che descriverebbe la parabola BCN, non potendo questa parabola esser descritta con due differenti velocità (*N.* 219.): ma questa forza equivale alla velocità, cui la bomba avrebbe acquistata cadendo dall' altezza del quarto del parametro del diametro, che passa pel punto B (*N.* 138.); onde la bomba urta con questa velocità il piano perpendicolare ED.

Per provare, che la bomba discendendo urta un piano MZ perpendicolare alla sua direzione, al punto dell' urto H, con una velocità uguale a quella da essa acquistata cadendo dall' altezza del quarto del parametro del diametro, il quale passa pel medesimo punto, tiro in H la tangente HL; dal vertice C conduco CR parallela alla tangente, ed in conseguenza doppia ordinata al diametro HP, e dal punto R tiro RV parallela ad LC, e segante la tangente LH prolungata al punto V: onde l' abbassamento VR equivale all' abbassamento LC, a cagione delle parallele LV, CR; e siccome HP è parallella ad LC, ed VR sega per mezzo la retta CR, così LV è altresì segata per mezzo in H. Ciò posto.

Quando la bomba è giunta in H, è manifesto, che se non incontrasse ostacoli, ella continuerebbe a muoversi, e descriverebbe la parabola HR; così la sua forza sarebbe uguale a quella d' una bomba d' egual peso, che tirata dal punto H colla direzione HV scorrerebbe la medesima parabola HR: ora, se questa seconda parabola, in vece d' esser tirata secondo la direzione HV, lo fosse secondo la direzione opposta HL, sopra la sua direzione HL essa scorrerebbe lo spazio HL = HV in un tempo uguale a quello, ch' avrebbe impiegato a scorrere lo spazio HV, e per conseguen-

guenza l' abbassamento LC, cagionato dalla gravità nel tempo impiegato a scorrere lo spazio LH, sarebbe uguale all' abbassamento VR, causato dalla gravità nel tempo impiegato a scorrere lo spazio HV; onde questa seconda bomba tirata secondo la direzione HL descriverebbe la parabola HC, e per conseguente la sua velocità sarebbe uguale a quella, ch' avrebbe acquistata cadendo da un' altezza uguale al quarto del parametro del diametro, che passa pel punto H (*N.* 138.) : ma la velocità della bomba tirata dal punto A, e giunta in H è la stessa che la velocità di questa seconda bomba, come s' è veduto; però detta bomba urta il piano MZ perpendicolare alla sua direzione con una velocità uguale a quella, ch' avrebbe acquistata cadendo da un' altezza uguale al quarto del parametro del diametro, che passa pel punto H.

223. COROLLARIO I°. *Se dal punto di projezione* (Fig. 66.) *alzasi perpendicolarmente all' ampiezza* AN *una retta* AE *uguale al quarto del parametro del diametro, che passa pel punto* A, *e che dall' estremità* E *tirisi* EL *parallela all' ampiezza, e quindi da qualsivoglia altro punto* B *della parabola una perpendicolare* BT *ad* EL, *dico; che la velocità, con cui la bomba percuoterebbe in* A *un piano perpendicolare alla sua direzione, o alla tangente* AS, *è alla velocità, con cui in* B *percuoterebbe un piano perpendicolare alla sua direzione, o alla tangente* BV, *come la radice dell' altezza* AE *è a quella dell' altezza* BT.

Poichè la bomba tirata dal punto A colla direzione AS descrive la parabola ACN, la sua velocità è uguale a quella, ch' avrebbe acquistata cadendo dall' altezza EA del quarto del parametro del diametro, che passa per A (*N.* 138.) : ora, se dal punto A al fuoco O della parabola io tiro la retta AO, ella sarà uguale al quarto del parametro del diametro, che passa pel punto A, come s' è detto nelle Sezioni Coniche; onde OA sarà uguale ad AE, e per conseguenza EL esser dee la direttrice della parabola, siccom' egli s' è insegnato nello stesso sito. Così, se dal punto B al medesimo fuoco O io tiro la retta BO, la quale sarà altresì 'l quarto del parametro del diametro, che passa pel punto B, ella sarà uguale a BT, ed in conseguenza BT sarà 'l quarto del parametro del diametro, che passa pel punto B: ma in questa Proposizione noi abbiam veduto, che la bomba urta in A un piano perpendicolare alla sua direzione AS con una velocità uguale a quella, ch' avrebbe acquistata cadendo dall' altezza AE uguale al

quarto del parametro del diametro, che passa pel punto A, e che in B ella urta un piano perpendicolare alla sua direzione BV con una velocità uguale a quella, ch' avrebbe acquistata cadendo dall' altezza BT uguale al quarto del parametro del diametro, che passa pel punto B, e queste due velocità acquistate sono fra loro come le radici dell'altezze EA, TB; dunque la forza dell' urto in A è alla forza dell' urto in B, come la radice di EA è a quella di BT.

224. COROLLARIO II. Quindi ne segue, ch' una bomba colpisce con egual forza un piano perpendicolare alla sua direzione nell' uscire A del pezzo come all' estremità N della sua ampiezza; che ne' punti B, H equidistanti dalla direttrice, o dall' ampiezza ella percuote colla medesima forza, ec.

225. COROLLARIO III. *Se una bomba A (Fig. 67.) è tirata successivamente colla medesima forza sotto due angoli equidistanti da 45 gradi, tal che descriva due parabole* ACN, ARN, *le quali abbiano la medesima ampiezza* AN, *dico; che in amendue le projezioni questa bomba urterà colla medesima forza de' piani perpendicolari alle sue direzioni, non solo all' uscir del pezzo e all' estremità* N *dell' ampiezza, ma eziandio ne' punti* B, H *equidistanti dall' ampiezza.*

Dal punto A io alzo perpendicolarmente all' ampiezza AN la retta AE uguale al quarto del parametro del diametro, che passa pel punto A della parabola ARN; così la velocità della bomba nell' uscir del pezzo sarà uguale alla velocità, ch' avrebbe acquistata cadendo da quest' altezza (*N.* 138.): ora colla medesima velocità la bomba descrive l' altra parabola ACN; onde la retta AE è altresì 'l quarto del parametro del diametro, che passa pel punto A della parabola ACN. Dunque dal punto E tirando la retta EL parallela all' ampiezza, ella sarà la direttrice delle due parabole; perocchè, se dal punto A io tiro una retta al fuoco della parabola ARN, essa equivarrà al quarto del parametro del diametro, che passa pel punto A della parabola ARN, ed in conseguenza anche ad AE; e la retta EL sarà la direttrice della parabola: così pure, se dal punto A io tiro una retta al fuoco della parabola ACN, ella sarà uguale al quarto del parametro del diametro, che passa pel punto A della parabola ACN, ed in conseguenza anche ad AE; e la retta EL sarà altresì la direttrice di detta parabola. Ciò posto.

Quando la bomba descrive la parabola ARN, gli urti in A, ed

ed N su piani perpendicolari alle direzioni, cioè alle tangenti ne' punti A ed N, son'uguali; perocchè le velocità di questi urti sono fra loro come le radici dell'altezze uguali AE, NL (*N.*223.): così pure, quando la bomba descrive la parabola ACN, gli urti in A ed N su' piani perpendicolari alle direzioni son parimente uguali fra essi e alli due precedenti, mercè che le lor velocità sono come le velocità, ch'acquistate sarebbero, se la bomba cadesse dall'altezze AE, LN; dunque nelle due projezioni la bomba colla medesima forza batte all'uscire e all'estremità AN li piani perpendicolari alle direzioni.

Ora supponiamo, che nella projezione ARN la Bomba urti in H un piano perpendicolare alla sua direzione, e che nella ACM ella urti in B, tanto distante dall'ampiezza quanto lo è il punto H, un piano perpendicolare alla sua. La velocità, con cui essa urterà in H, sarà uguale alla velocità, ch'avrebbe acquistata cadendo dall'altezza HV, ch'è il quarto del parametro del diametro, che passa pel punto H (*N.*222.223.); e per la stessa ragione ella urterebbe in B con una velocità uguale a quella, ch'avrebbe acquistata cadendo dall'altezza TB, ch'è il quarto del parametro del diametro, che passa pel punto B: ma le due velocità VH, TB son' uguali; onde la velocità, con cui la bomba colpisce in H un piano perpendicolare alla sua direzione, è uguale a quella, con cui essa in B percuote un piano perpendicolare alla sua.

226. COROLLARIO IV. Generalmente dunque egli è falso, che di due bombe uguali tirate sotto angoli equidistanti da 45 gradi, quella tirata al di sopra di gradi 45 percuota con più forza di quella tirata al di sotto, come comunemente si crede: nè ciò è vero, se non quando i piani, su cui esse cadono, son' orizzontali; poichè in tal caso la bomba, che descrive la parabola ARN (*Fig.* 68.), urta in N un piano orizzontale con una velocità uguale a quella, ch'avrebbe acquistata cadendo dall'altezza TN, compresa fra la tangente RT al vertice R, e l'ampiezza AN (*N.* 220.); e la bomba, che descrive la parabola ACN, urta il piano orizzontale in N con una velocità uguale a quella, ch'avrebbe acquistata cadendo dall' altezza MN, compresa fra la tangente CM al vertice C, e l'ampiezza. Ora queste due altezze son disuguali; onde la velocità degli urti, che sono come le radici di quest'altezze, son pure disuguali; e la bomba, che descrive la parabola ARN, urta con più forza della bomba, la qual descrive la parabola ACN. Ma lo stesso più non succede, quando

i pia-

i piani urtati sono, come s'è veduto, perpendicolari alle direzioni, nè quando essi sono, come tosto vedremo, obbliqui alle direzioni, e all'orizzonte.

Più ancora può succedere, che la bomba, tirata sotto l'angolo al di sopra di 45 gradi, percuota con minor forza di quella tirata sotto l'angolo al di sotto di gradi 45; perocchè, se'l piano urtato in N (*Fig.* 68.) dalla bomba, che descrive la parabola ACN, è perpendicolare alla sua direzione, o tangente NS, sarà questo stesso piano obbliquo alla direzione, o tangente della parabola ARN: così la bomba, che descriverà la parabola ARN, non urterà questo piano con tanta forza come farebbe se l'urtasse perpendicolarmente. Ma se ella urtasse detto piano perpendicolarmente, la sua forza equivarrebbe a quella della bomba, che descriverebbe la parabola ACN, ed urteria perpendicolarmante lo stesso piano (*N.* 225.); dunque l'urto obbliquo della bomba, che descrivererebbe la parabola ARN, è minor dell'urto diretto di quella, che descriveria la parabola ACN.

227. COROLLARIO V. Quindi n'avviene, che in pratica, quando si vuol tirare p. e. sopra piani inclinati all'orrizzonte, sopra tetti di case, volte, o magazzini, non si dee più tirar sotto l'angolo maggiore, ma sotto quello, il quale fa, che la bomba possa urtare men'obbliquamente.

228. PROPOSIZIONE XXXVII. *Se una bomba* (Fig. 69.) *urta in qualche punto* B *della sua parabola un piano* MN *inclinato all'orizzonte e alla sua direzione* BR, *la velocità, con cui ella urta questo piano, è a quella, con che l'urterebbe, se fosse perpendicolare alla sua direzione, come il seno dell'angolo d'incidenza al seno retto, od al raggio.*

Sopra la direzione BR io prendo una parte BP uguale alla radice del parametro appartenente al punto B; da P io abbasso la perpendicolare PM sul piano MN, e termino'l parallelogrammo PMBQ.

Se l'urto fosse diretto, la bomba percuoterebbe il piano con una velocità espressa da PB (*N.* 222.); ma perchè l'urto è obbliquo, la velocità PB è composta della velocità perpendicolare PM, e della velocità PQ paralleia ad MN: ora questa non agisce sopra MN; dunque la bomba colpisce colla velocità PM. Ma nel triangolo PMB i lati PM, PB sono fra loro come i seni degli angoli opposti, cioè come i seni dell'angolo d'incidenza PBM al seno dell'angolo retto PMB; onde la velocità PM,

con

con cui la bomba percuote il piano, è alla velocità PB, come il seno PM dell' angolo d'incidenza PMB è ad un seno retto PB.

Cercando dunque nelle Tavole de' Seni il raggio e 'l seno dell' angolo d'incidenza, si dirà: come 'l raggio è al seno, così PB è ad un quarto termine, che sarà 'l valore di PM.

229. COROLLARIO. *Se due bombe d' egual peso son tirate colla medesima forza sotto angoli equidistanti da 45 gradi, tal che l' ampiezza di due parabole sia la stessa* (Fig. 70.), *e che vengano in punti* B, N *equidistanti dalla loro ampiezza ad urtare de' piani* OT, VS *ugualmente inclinati alle lor direzioni* HB, NE, *dico, ch' esse urteranno detti piani con forze uguali.*

I parametri appartenenti ai punti B, N saranno uguali, come sopra s'è veduto; perciò, se perpendicolari fossero i due piani, li due urti sarebbono uguali, perocchè le velocità sarebbero come le radici di questi parametri eguali (N.225.) : ora, siccome gli urti son obbliqui, così prendo sopra le direzioni BH, NX uguali ciascuna alla radice dell' uno, o dell' altro parametro, e da' punti H, X io abbasso sopra i piani le perpendicolari HO, XV; però la bomba, che descrive la parabola ARM, urterà il piano VS colla velocità XV, e quella, che descrive la parabola ACM, urterà il piano OT colla velocità HO. Ma le due velocità VS, OT son' uguali, mercè che i triangoli HBO, XNV, avendo l' angolo d'incidenza HBO uguale all' angolo d' incidenza XNV, e l'ipotenusa HB uguale all'ipotenusa XN, sono fra loro eguali; dunque gli urti son pure uguali; e lo stesso direbbesi, se l' urto si facesse in M, ch' è l'estremità dell' ampiezza.

230. COROLLARIO II. Ma se disuguali fossero gli angoli d'incidenza, ed uguali fra loro le distanze de' punti B, N all' ampiezza, disuguali sarebbero le velocità, od i seni XV, HO, ed uguali i raggi, o seni retti XN, HB; perciò le velocità degli urti sarebbero fra se come i seni degli angoli d'incidenza.

231. COROLLARIO III. Quindi ne segue, che se l' angolo d'incidenza XNV fosse minore dell'angolo d'incidenza HBO, la velocità, con cui la bomba, che descrive la più alta parabola, urterebbe il suo piano, sarebbe minor di quella, con che l'altra bomba urterebbe il suo.

232. COROLLARIO IV. Finalmente, se disuguali fossero gli angoli d'incidenza, e le distanze de' punti B, N all' ampiezza, differenti sarebbero i seni XV, HO, ed i raggi XN, HB, poichè i parametri appartenenti a' punti B, N non sarebbero più

uguali,

uguali; perciò la velocità XV farebbe alla velocità HO, come il feno dell'angolo d'incidenza XNV per rapporto al raggio retto XN è al feno dell'angolo d'incidenza HBO per rapporto al raggio retto HB.

Onde dopo d'aver cercato nelle Tavole il raggio e'l feno dell'angolo d'incidenza XNV, direbbefi: come'l raggio è a quefto feno, così XN, radice del parametro appartenente al punto N, è ad un quarto termine, che farebbe la velocità XV. Similmente, dopo aver nelle Tavole cercato il feno dell'angolo d'incidenza HBO, direbbefi: come il raggio è al feno, così HB, radice del parametro appartenente al punto B, è ad un quarto termine, che farebbe la velocità HO.

233. PROPOSIZIONE XXXVIII. *Gli affondamenti delle bombe nel terreno, fu cui elle cadono, fono fra loro come i quadri delle lor cadute, o come l'altezze delle parabole da effe deferitte* (Fig. 71.).

Sieno le due parabole ACN, ARH deferitte da due Bombe tirate con forze difuguali, e l'altezza della prima fia CP, o QN, e quella della feconda RE, o TH; quefte due Bombe in fine delle loro ampiezze N, H percuoterebbero un piano orizzontale con velocità uguali alle radici dell'altezze QN, TH (*N.*220.); onde pofto, che'l terreno, fu cui effe cadono, fia affai ftabile per foftenere quefte Bombe quando fi collocaffero colle mani, è manifefto, che fe cadendo s'affondano, ciò fuccede in forza delle velocità acquiftate, e non a motivo della lor gravità. Refta dunque a far vedere, che gli affondamenti di quefte Bombe fono come i quadri delle lor velocità, o come le loro altezze; e ciò ordinariamente dimoftrafi mediante una ferma fperienza, la quale fi fa nel feguente modo.

Prendefi dell'argilla, o della creta, la quale fia tanto confiftente da poter fopra di fe foftenere una palla. Pofcia riprendendo quefta palla, e lafciandola fucceffivamente cadere da differenti altezze, trovafi fempre, che gli affondamenti da effa fatti nell'argilla fono fra loro in ragion dell'altezze. Ora, per rendere di ciò cagione, s'offervi, che la terra è compofta d'infiniti ftrati gli uni fopra gli altri, i quali per la lor refiftenza diftruggono a poco a poco le forze della palla; e quantunque ciafcuno di quefti ftratti refifta da vantaggio, e levi maggior velocità alla Bomba, che cade da una minor'altezza in N, tuttavolta, ficcome quella, che cade in H, va con maggior velocità, ed incontra nello fteffo tempo
più

più strati così egli si fa una compensazione, tal che in tempi uguali le due Bombe perdono gradi eguali di velocità. Quindi dunque ne succede lo stesso, che accade a due corpi, i quali dopo esser discesi verso 'l centro della terra da due altezze ineguali risalgono colle loro velocità acquistate, e in tempi eguali perdono gradi eguali di detta velocità: ora gli spazj scorsi da questi corpi, dopo distrutte totalmente le lor velocità, sono fra loro come i quadri delle velocità, o come l'altezze; però anche gli affondamenti delle due bombe esser debbono come i quadri delle velocità, o come l'altezze. La sola differenza, che vi passa, si è, che i due corpi risalendo scorrono degli spazj uguali all'altezze, da cui son discesi, là dove gli affondamenti delle bombe non sono uguali all'altezze delle lor parabole, ma son semplicemente proporzionali a dette altezze; e ciò a motivo, che la resistenza degli stratti di terra, ch'esse forano, è ad ogni istante molto maggiore della resistenza, che la gravità opporrebbe loro ad ogni istante, se risalissero colle lor velocità acquistate.

DELLA STATICA.

Del Centro di Gravità de' Corpi Solidi.

234. Due corpi si dicono in *Equilibrio*, quando l'uno impedisce all'altro di muoversi, o quando amendue giaciono in una perfetta quiete: p. e. se due corpi A, B (*Fig.* 72.) son' appesi all'estremità d'una leva AB sospesa per un punto C, e che l'uno impedisca vicendevolmente all'altro di discendere verso 'l centro della terra, i due corpi saranno in equilibrio, e nessun di loro sarà in moto. Che se in vece dell'uno de' corpi A mettesi una potenza, ch' impedisca 'l corpo B di discendere senza più poterlo far salire, la potenza e 'l peso saranno in equilibrio.

Il punto C, intorno a cui due corpi A, B sono in equilibrio, appellasi *Centro d'equilibrio*.

235. Evvi in tutt'i corpi un certo punto, detto *centro di gravità*; egli è di tal sorta, che s'è trattenuto di discendere verso 'l centro della terra, tutte le parti di detto corpo sono in equilibrio intorno ad esso centro.

236. Il *centro di grandezza* d'un corpo è quel punto, per cui noi possiamo far passare un piano, che divida per mezzo detto

corpo. Ne' corpi omogenei, vale a dire ne' corpi in cui tutte le parti sono d'una medesima materia, il centro di grandezza è lo stesso che 'l centro di gravità; perocchè allora il peso d'una parte è uguale a quello dell'altra.

237. Se una linea AC (*Fig.* 73.) gira intorno ad un punto B, ei chiamasi *centro di moto*; e qualunque retta linea MN, che passa pel punto B, e che non trovasi nel piano, o nella superficie, cui la linea AC descrive durante 'l suo moto, dicesi *Asse di moto*.

238. Siccome una linea AC può in diversi modi girare intorno al suo asse di moto, così da quì innanzi intenderem sempre, che la retta AC (*Fig.* 74.) sia in una posizione orizzontale, che'l suo asse di moto MN sia altresì orizzontale e perpendicolare ad AC, che AC gir'intorno a detto asse, continuando sempre ed esserli perpendicolare, e ch'in conseguenza il piano ARCH descritto da essa linea sia verticale, cioè perpendicolare all'orizzonte, e all'asse MN di moto. Se talvolta poi vorremo intender diversamente, sarà nostra cura di prima spiegarci.

239. Quando parleremo di più corpi appesi a differenti punti d'una leva, che girerà intorno ad un'asse di moto, considereremo questa leva come priva di qualunque gravità, affine di poter considerare le forze di detti corpi independentemente dalla gravità della leva: ma siccome in pratica la gravità delle leve trascurata cagiona dell'alterazione nel rapporto delle forze dei corpi, così ci riserbiamo di correggere questo fallo, quando parleremo delle Machine.

240. Se due corpi appesi alle due estremità d'una leva sono in equilibrio intorno al centro di moto, allora il centro di moto, e quello d'equilibrio non sono ch'un'istesso punto.

241. PROPOSIZIONE XXXIX. *Le forze di due, o più corpi* A, B, ec. (*Fig.* 75.) *appesi a diversi punti d'una leva* AB, *che gira intorno ad un'asse* MN *di moto, sono fra loro come i prodotti delle masse per le parti della leva comprese fra detti corpi, e l'asse di moto; cioè la forza di* A *è a quella di* B, *come il prodotto* A × AC *è al prodotto* B × BC.

Non può il corpo B muoversi intorno ad MN, e descrivere p. e. l'arco BR, quando il corpo A non si muova e descriva l'arco AS, perchè supponiamo che la leva AB sia inflessibile. Ora, a motivo degli angoli uguali RCB, ACS, simili sono i settori RCB, ACS; però BR . AS : : BC . AC: ma gli archi BR, AS sono fra se come le velocità de' due corpi, poichè questi due

archi sono gli spazj scorsi dai due corpi in uno stesso tempo; onde le velocità de' due corpi son parimente come i raggi BC, AC, ed in conseguenza noi possiamo prendere questi due raggi per l'espressione delle velocità. Ora le forze sono fra loro come le quantità di moto, o come i prodotti delle masse per le velocità; dunque le forze di A e B sono fra se come i prodotti A × AC, B × BC.

242. AVVERTIMENTO. Questa Proposizione è vera, anche quando la leva non è perpendicolare all'asse di moto. Supponiamo, per esempio, ch'una leva orizzontale AB (*Fig. 76.*) sia fissamente attaccata in C al suo asse di moto MN altresì orizzontale, ma obbliquo ad AB, e ch'ei si ravvolga intorno a se stesso, cioè intorno a' suoi due punti fissi M, N, quasi come uno spiedo si ravvolge intorno agli alari, che'l sostengono; chiaro apparisce, che la leva AB girerà intorno a detto asse, conservando sempre il suo angolo d'obbliquità BCN, od ACM: così da' punti A, B tirando delle perpendicolari AM, BN all' asse MN, i pesi A, B saranno sempre durante il loro moto in queste medesime distanze dall'asse, e descriveranno delle circonferenze, i cui circoli saran perpendicolari ad MN. Ora le velocità di questi pesi saranno fra loro come le circonferenze descritte dagli stessi pesi, perchè saran descritte nel medesimo tempo; ed in conseguenza queste velocità saran parimente come i raggi AM, BN, che sono nella medesima ragione delle lor circonferenze: ma a cagione de' triangoli simili BNC, AMC noi abbiamo AM. BN :: AC. BC; onde anche le velocità de' pesi A, B saranno fra se come AC, BC, e per conseguente le loro forze saran come i prodotti A × AC, B × BC.

Dal che comprendesi, che se sopra (*N. 238.*) noi abbiamo scelto l'asse di moto perpendicolare alla leva, l'abbiam fatto a solo oggetto di determinare, e soccorrer nel medesimo tempo l'immaginazione.

Quando due, o più corpi sono appesi a differenti punti d' una leva, che gira intorno ad un'asse di moto, i prodotti A × AC, B × BC delle masse per le braccia della leva, o per le parti della stessa leva comprese fra'l peso e'l centro C di moto, chiamansi *momenti* de' corpi A, B: così 'l *momento* di A è A × AC, quello di B si è B × BC; e così degli altri.

243. PROBLEMA. *Appesi due corpi* A e B. (Fig. 77.) *a due differenti punti d' una leva, trovare il loro centro d'equilibrio,*

bric, *cioè 'l punto*, *per cui dovrebbesi sospender detta leva*, *acciò i due corpi fossero in equilibrio*.

Divido la distanza AB de' due corpi AC, CB in due parti, le quali sieno fra loro reciprocamente, come i pesi dei due corpi, cioè faccio A. B : : BC. AC: metto la picciola lunghezza BC dalla parte del corpo B, ch'è 'l maggiore dei due, e la grande AC da quella dell'altro corpo A; e 'l punto di divisione C sarà 'l centro d'equilibrio cercato.

Imperocchè, acciò i due corpi sieno in equilibrio, bisogna, ch' uguale sia il prodotto de' corpi per le loro distanze al centro, dovendo esser' uguali i lor momenti, o le loro forze: ma, per la costruzione noi abbiamo A. B : : BC. AC. Dunque A × AC = B × BC; e però egli v'è equilibrio.

244. PROBLEMA. *Appeso un corpo* A *ad un braccio* AD *d' una leva*, *il cui centro di moto è in* C (Fig. 77.), *rinvenire a qual punto debbasi attaccare un' altro corpo* B, *perchè vi sia equilibrio*.

Per ciò fare, io dico: il peso B è al peso A, come la distanza AC del peso A al centro C è ad un quarto termine, che sarà la distanza CB, a cui si dee attaccare il peso; perchè, essendo B. A : : AC. BC, conseguentemente B × BC = A × AC, e però i due corpi esser debbono in equilibrio.

245. PROBLEMA. *Appesi due*, *o più corpi* A, B, D, ec. (Fig. 78.) *ad un braccio* CD *d'una leva* MD, *che gira intorno ad un centro di moto* C, *rinvenire il punto*, *in cui tutti si dovrebbero attaccare*, *acciocchè avessero una forza uguale alla somma delle forze*, *che ciascuno d'essi ha nel loro sito*.

Per la condizione del Problema, la forza della somma de' pesi tutt'insieme attaccati alla distanza del punto C, che ci vien ricercato, sarà il prodotto della somma di detti pesi moltiplicata per la distanza che si cerca: e questa forza equivaler dee ai tre prodotti del corpo A per la sua distanza AC, del corpo B per la sua distanza BC, e del corpo D per la sua distanza DC, poichè questi tre prodotti esprimono le forze dei tre corpi (*N.* 241.); onde chiamando x la distanza cercata, abbiamo $Ax + Bx + Dx = A \times AC + B \times BC + D \times DC$, e dividendo d' amendue le parti per $A + B + D$, avremo $x = \frac{A \times AC + B \times BC + D \times DC}{A + B + C}$; dal che deducesi la seguente regola generale.

Per

Per ritrovar la distanza, a cui debbonsi attaccare i corpi, acciò abbiano una forza eguale alla somma delle forze, che ciascuno d'essi ha nel loro sito, moltiplichisi cadaun corpo per la sua distanza al centro di moto, e dividasi la somma dei prodotti per quella de' corpi; ciò che ci darà un quoziente, il quale sarà la distanza ricercata.

Sia A = 1, B = 2, D = 4, AC = 1, BC = 2, DC = 3; ed avremo A × AC = 1, B × BC = 4, e D × DC = 12. Onde $x = \frac{1 + 4 + 12}{1 + 2 + 4} = \frac{17}{7}$ $2\frac{3}{7}$; quindi pigliando una lunghezza CH, tal che s'abbia CA. CH : : 1. $2\frac{3}{7}$, la lunghezza CH sarà la distanza, a cui si debbono appender tutt' i pesi, acciò ivi abbiano una forza uguale alla somma delle forze, che ciascun di essi ha nel loro sito.

246. PROBLEMA. *Appesi più corpi* A, B, D, E (Fig. 79.) *a differenti punti d'una leva, trovare il loro centro d'equilibrio.*

Concepisco, che la leva gir' intorno ad un'asse di moto posto alla sua estremità C; cerco la distanza CH, a cui dovrebbonsi appender tutt' i corpi, acciò avessero sopra CB la stessa forza, che hanno, essendo ciascuno nel loro sito (*N.* 245.); e dico, che se sospendesi la leva pel punto H, tutt' i corpi saranno in equilibrio.

Perocchè, quando il corpo A è nel suo sito A, il suo momento, o la sua forza è A × AC; e quando egli è in H, il suo momento, o la sua forza è A × CH, ovvero A × AC + A × AH; dunque la forza, ch' ei guadagna quando è trasportato in H, si è A × AH: per la stessa ragione, la forza, cui guadagna il corpo B trasportato in C, è B × BH. Così la somma delle forze, che i corpi A, B guadagnano, dopo trasportati in H, è A × AH + B × BH.

Dall'altra parte, quando il corpo D è nel suo sito D, il suo momento, o la sua forza è D × DC; e quando egli è trasportato in H, la sua forza non è che D × CH, ovvero D × DC — D × HD; onde la forza, ch' esso perde quando è in H, è D × HD: per questa stessa ragione, la forza, cui 'l corpo E perde quando è in H, si è E × HE. Così la somma delle forze, che i due corpi D, E perdono quando sono in H, si è D × HD + E × EH.

Ora, perchè la forza de' corpi trasportati in H è uguale alla somma delle forze, che ciascun d'essi avea nel loro sito, è di necessità, che la somma delle forze guadagnate dai due primi sia uguale

uguale alla somma delle forze perdute dagli altri due; onde $A \times AH + B \times BH = D \times DH + E \times EH$.

Se dunque si concepisce, che la leva sia sospesa in H, cioè che 'l suo centro di moto sia 'l punto H, la forza del corpo A sul braccio AH sarà $A \times AH$, e quella del corpo B sarà $B \times BH$. Così pure, la forza del corpo D sul braccio EH sarà $D \times DH$, e quella del corpo E sarà $E \times EH$: ma egli s'è trovato, che la somma delle due prime forze equivale a quella delle due seconde; onde i quattro corpi saranno in equilibrio intorno al punto H.

247. PROBLEMA. *Essendo due, o più corpi* A, B (Fig.80.) *appesi a differenti punti d' un braccio* CB *d' una leva* MB, *che gira intorno ad un centro* C *di moto, ritrovare in quale distanza da* C *debbasi appendere un' altro corpo* D *sull' altro braccio* CM, *perchè vi sia equilibrio*.

Per la condizione del Problema, la forza del corpo D esser dee uguale alla somma delle forze dei due corpi; onde il corpo D moltiplicato per la distanza cercata equivaler dee al prodotto di A per AC, più il prodotto di $B \times BC$. Così chiamando x la distanza, che si cerca, avremo $D \times x = A \times AC + B \times BC$, e dividendo dall' una e dall' altra parte per D, avremo $x = \frac{A \times AC + B \times BC}{D}$; cioè, se dividesi la somma de' momenti di A e B pel peso D, il quoziente sarà la distanza cercata.

Sia $a = 1$, $B = 2$, $D = 4$, $AC = 1$, $BC = 2$; ed avremo $A \times AC = 1$, $B \times BC = 4$, e però $x = \frac{1+4}{4} = \frac{5}{4}$. Onde pigliando sul braccio MC una lunghezza MD, tal che s'abbia $1 . \frac{5}{4} :: CA . CD$, D sarà 'l punto, a cui dovrassi appender' il peso D.

248. PROBLEMA. *Appesi due, o più corpi* A, B (Fig.80.) *a differenti punti d' un braccio* CB *d' una leva* MB, *che gira intorno ad un centro* C *di moto, trovare il peso, che por si dee a un punto* D *dell' altro braccio* CM, *perchè vi sia equilibrio*.

Chiamo x il peso cercato, e conseguentemente per far' equilibrio, avremo $x \times CD = A \times AC + B \times BC$; onde d' amendue le parti dividendo per CD, avremo $x = \frac{A \times AC + B \times BC}{CD}$; cioè, se dividesi la somma de' momenti di A, e B per la data distanza CD, il quoziente sarà 'l valore del peso cercato.

Sia

Sia A = 1, B = 2, AC = 1, BC = 2, CD = $\frac{1}{4}$; dunque A × AC = 1, e B × BC = 4: così $x = \frac{1 + 4}{\frac{5}{4}} = \frac{4 + 16}{5} = \frac{20}{5} = 4$, e conseguentemente il peso cercato D esser dee = 4.

249. PROPOSIZIONE XL. *Data una leva orizzontale* MD (Fig. 81.), *a cui ne sia fissamente attaccata un' altra* SR, *che la traversi, e all' estremità della quale sieno due pesi* S, R, *il cui centro d' equilibrio sopra* SR *sia 'l punto* H, *ove le due leve si segano*, *dico*; *che se la leva* MD *gira intorno ad un' asse di moto* C, *traendo seco la leva* SR, *la somma de' momenti, o delle forze de' pesi* S, R *sul braccio* CD *della leva* MD *sarà uguale al momento, od alla forza, che questi due pesi avrebbero sul medesimo braccio, se fossero attaccati al punto* H, *ch' è il loro centro d' equilibrio sulla leva* SR.

Da' punti S, R tiro le rette SL, RO parallele alla leva MD, e le rette ST, RV parallele all' asse OL di moto.

Ora i corpi S, R, girando intorno ad LO, descriveranno delle circonferenze, i cui raggi sono le perpendicolari SL, RO; così le velocità di essi corpi saran come dette circonferenze, o come i lor raggi SL, RO: ma SL = CT, a motivo delle parallele, ed OR = CV; onde le velocità dei due corpi saranno fra esse come le rette CT, CV, e per conseguente le loro forze, o i lor momenti sul braccio CD saranno fra se come i prodotti S × CT, R × CV, cioè essi tanto peseran sopra questo braccio, come se fossero posti in T, ed V.

Ora, perchè i pesi S, R sono in equilibrio intorno al punto H, abbiamo RH. SH : : S. R, e a cagione de' triangoli simili HRV, HST, si ha HR. HS : : HV. TH; dunque HV. TH : : S. R, e conseguentemente S × TH = R × HV. Ma S × TH è la quantità di forza, cui 'l corpo S posto in T guadagnerebbe se fosse trasportato in H, perocchè allora il suo momento sul braccio CD sarebbe S × CH = S × CT + S × TH, ed R × HV è la quantità di forza, cui 'l corpo R posto in V perderebbe se fosse trasportato in H, poichè allora il suo momento sopra 'l braccio CD sarebbe R × CH = R × VC — R × HV; onde, perchè il guadagno di forza d'un lato è uguale alla perdita dell' altro, i due corpi posti in H debbono aver tanta forza sopra CD, quanta n' avrebbero se fossero in T, ed V: ma già essi tanta n' avrebbono in T ed V, quanta ne hanno in S, ed R; però i due corpi posti in H han tanta forza sul braccio CD, quanta ne hanno in S, ed R.

250. AV-

250. AVVERTIMENTO. Questa Proposizione è pur vera, anche quando l' asse di moto LO (*Fig.* 82.) non è perpendicolare alla leva MD, perciocchè allora i pesi S, R descriverebbero intorno ad LO delle circonferenze, i cui raggi sarebbon le perpendicolari PS, RQ differenti dalle rette SL, RO parallele alla leva MD ; tuttavolta, a motivo de' triangoli simili SPL, RQO, noi avremmo SP. RQ :: SL. RO, e conseguentemente le velocità dei due corpi, che sarebbero fra loro come i raggi SP, RQ delle lor circonferenze, sarebbono altresì come le parallele LS, RO, o come le rette CT, CV; ed i loro momenti, o le lor forze sul braccio CD sarebbero ancora come S × CT, R × CV, cioè farebbon lo stesso sforzo sopra CD, che se fossero in T, ed V. Quindi proveremmo come prima, che i pesi trasportati in H avrebbero la medesima forza, che se fossero in T, ed V, ovvero in S, ed R.

251. PROBLEMA. *Essendo più corpi* A, B, C, D (Fig. 83.) *sopra un piano orizzontale, trovare il loro centro d' equilibrio comune.*

Tiro la linea AB, ch'io considero come una leva, a cui sieno attaccati i due pesi A, B; su questa leva io cerco'l centro d' equilibrio E di detti due corpi; dal punto E al peso C conduco la retta EC, ch'io considero come una leva, a cui sieno in E attaccati i due pesi A e B, ed in C il peso C; cerco sulla leva EC il centro d'equilibrio H dei due pesi A, B post' insieme in E, e del peso C posto in C; dal punto H al peso D tiro la retta HD, ch' io considero come una leva, a cui sieno in H attaccati i tre pesi A, B, C, e'l peso D in D, e sopra questa leva cercando'l centro d'equilibrio L dei tre pesi A, B, C posti in H, e del peso D posto in D, dico; che'l punto L è'l centro d'equilibrio di tutt'i corpi posti ciascheduno nel loro sito.

Perocchè, se supponiamo, che le tre leve AB, EC, HD sieno fissamente attaccate ai punti E, H, i due corpi A, B, essendo in equilibrio intorno ad E, tanto peseranno sul braccio EH della leva EG, come se fossero amendue trasportati in E (*N.* 249.): parimente, i due pesi A, B trasportati insieme in E sulla leva EG sono in equilibrio intorno al punto H col peso C; onde i due pesi A, B messi in E, e'l peso C posto in C tanto pesano sul braccio HL della leva HD, come se tutti e tre fossero posti in H. Ora, per la costruzione, i tre pesi posti in H, e'l peso D collocato in D sono in equilibrio intorno al punto L;

duo-

dunque se rimettonsi tutt' i pesi ciascheduno nel loro sito, essi saranno ancora in equilibrio intorno ad L, perchè sul braccio HL non pesebbero nè più, nè meno.

252. PROPOSIZIONE XLI. *Se più corpi* A, B, C, D (Fig. 84.) *posti sopra un piano orizzontale girano intorno ad un' asse di moto* MN *altresì orizzontale, conservando sempre le loro distanze* AM, BR, CP, DN *a detto asse, dico; che la somma de' loro momenti, o delle lor forze è uguale alla forza, ch' essi avrebbono, se fossero tutti trasportati al loro centro d' equilibrio comune* L, *e se girassero intorno all' asse* MN, *conservando sempre la distanza* LX *di detto centro all' asse di moto.*

Tiro la retta AB, e sopra d' essa considerata come una leva cercando il centro E d' equilibrio de' corpi A, B, dal punto E conduco la retta ES perpendicolare all' asse di moto, e da' punti A, B le rette AT, BV perpendicolari ad ES prolungata in V. Ora i corpi A, B, girando intorno ad MN, descrivono delle circonferenze, i cui raggi sono AM, BR; così le lor velocità son come i raggi, o le leve AM, BR: ma AM = TS, a cagione delle parallele, e BR = SV; dunque le velocità de' corpi A, B son come le rette TS, SV, ed in conseguenza i lor momenti sono come A × TS, B × VS, cioè i loro momenti sono gli stessi; che se fossero posti in T, ed V. Ora, essendo i corpi A, B in equilibrio intorno al punto E, abbiamo B. A :: AE. EB (*N.* 243.), e a motivo de' triangoli simili AET, EBV noi abbiamo AE. EB : : TE. EV; quindi B. A :: TE. EV, il che ci dà A × TE = B × EV: ma A × TE è'l momento, o la forza, cui'l corpo A posto in T guadagnerebbe, se si mettesse in E, perchè allora il suo momento sarebbe A × SE = A × TS + A × TE; e B × EV è'l momento, o la forza, cui 'l corpo B posto in V perderebbe, se fosse trasportato in E, poichè allora il suo momento sarebbe B × ES = B × VS — B × EV.

Onde, giacchè i corpi posti in T ed V avrebbono le medesime forze, che se fossero in A e B, e perchè trasportandoli amendue in E, il guadagno di forza dell' uno sarebbe uguale alla perdita dell' altro, è manifesto, che questi due corpi posti in E avrebbero tanta forza, come se entrambi fossero nel loro sito A e B; e conseguentemente noi avremo A × ES + B × ES = A × AM + B × BR.

Se dunque si concepisce, che questi due corpi A e B sien posti in E, tiro la retta EC, e su detta leva cercando 'l centro d'

equilibrio H dei due corpi A e B posti in E, e del corpo C, proverò come sopra, che le forze di questi tre corpi girando intorno ad MN son'uguali alla forza, ch'essi avrebbono, se fossero insieme posti in H.

E dal punto H conducendo la retta HD, poi cercando su detta leva il centro d'equilibrio L dei tre corpi A, B, C posti in H, e del corpo D, proverò eziandio, che i quattro corpi posti in L avranno tanta forza girando intorno ad MN, quanta ne hanno i tre A, B, C posti in H, e'l corpo D messo in D: ma i tre corpi A, B, C posti in H hanno la stessa forza, che se i due A, B fossero in E, e'l corpo C in C, come s'è veduto, e i due corpi A, B tanta ne hanno in E, quanta n'avrebbero, se fossero in A, e B; onde i quattro corpi posti in L han tanta forza, quanta essi n'avrebbono, se fossero ne'loro siti.

253. COROLLARIO. Quindi ne segue, che se si moltiplicano i quattro corpi A, B, C, D ciascuno per la sua distanza AM, BR, CP, DN, la somma de'prodotti sarà uguale alla somma de'quattro corpi moltiplicata per la distanza LX del centro di gravità; cioè noi avremo $A \times AM + B \times BR + C \times CP + D \times DN = A \times LX + B \times LX + C \times LX + D \times LX$.

Applicazione de' precedenti Principj alla Geometria.

254. Ciò che da noi s'è detto circa l'equilibrio de' corpi ha dato occasione al padre *Guldin* Gesuita d' inventare un Metodo generale e assai comodo per rinvenire la solidità di tutt' i corpi formati dalla rivoluzione d' un piano intorno ad un'asse di moto, e dalla misura delle loro superficie; e quindi ancora si deduce la maniera di misurar'i prismi tronchi da'piani inclinati alle lor basi, qualunque sia la figura di esse basi, e di ritrovare il valor delle loro superficie: ciò che noi dimostreremo nelle seguenti Proposizioni.

255. PROPOSIZIONE XLII. *Se una linea* AB (Fig. 85. 86. 87. 88.) *gira intorno ad un' asse* MN *di moto, in qualsivoglia posizione ella si trovi, purchè tanto essa, quanto l' asse sieno orizzontali, ovvero sieno amendue in uno stesso piano, il quale potrà sempre considerarsi come orizzontale, dico; che 'l piano, o la superficie, cui questa linea descriverà, facendo un' intera rivoluzione, equivale al prodotto della linea* AB *moltiplicata per la circonferenza descritta dal suo centro di gravità* C.

Si

Si concepisca, che la linea AB sia una leva carica in tutt'i suoi punti di pesi uguali; egli è manifesto, che'l centro d'equilibrio di questi punti sarà sul mezzo C della linea, perch'ei sarà d'amendue le parti lo stesso: ora tutti questi pesi girando intorno all'asse di moto MN, descriveranno delle circonferenze, i cui raggi saran le perpendicolari tirate da ciascun peso sopra MN; così le velocità di questi pesi saranno fra se come le circonferenze descritte, ed i loro momenti, o pure le lor forze saranno i prodotti de' pesi per la loro velocità, o per le circonferenze, ch' essi descrivono. Ma la somma di questi momenti, o prodotti equivale al momento, ch'avrebbero tutt'i corpi, se fossero trasportati in C, e girassero intorno ad MN, come sopra s'è veduto, nel qual caso altro non è questo momento se non se il prodotto della somma de' pesi moltiplicata per la velocità comune, cioè per la circonferenza descritta dal punto C; onde la somma dei prodotti de' pesi moltiplicati ciascuno per la circonferenza, che cadaun di loro descrive nel suo sito, equivale al prodotto della somma de' pesi moltiplicata per la circonferenza, che gli stessi descriverebbero, se fossero posti ciascuno in C.

Ora i punti componenti la linea AB sono fra loro come i pesi, perchè son tutti eguali; dunque la somma de' prodotti di questi punti per le circonferenze ch' essi descrivono, il che altro non è se non se la somma di dette circonferenze, è uguale alla somma de' punti, ovvero alla linea AB moltiplicata per la circonferenza descritta dal punto C, perchè la somma de' punti della linea AB equivale alla stessa AB: ma la somma delle circonferenze descritte da tutt'i punti ciascuno nel suo sito è'l piano, o la superficie AB descritta intorno ad MN; onde questo piano, o questa superficie è uguale al prodotto della linea AB moltiplicata per la circonferenza descritta dal suo centro di gravità C.

256. AVVERTIMENTO. Ciò è uniforme agl' insegnamenti della Geometria. Imperocchè, 1°. se la linea AB è perpendicolare all'asse di moto MN (*Fig.* 85.), ella descrive un circolo, e già si sà, ch'un circolo è uguale alla circonferenza, cui'l suo raggio AB descrive, moltiplicata per la metà del raggio, ovvero alla circonferenza, cui descrive la metà AC del suo raggio, moltiplicata pel raggio AB. 2°. se AB è obbliqua ad MN, e lo sega in A (*Fig.* 86.), essa descrive la superficie d' un cono, e già sappiamo, che detta superficie è uguale al lato AB del cono moltiplicato per la circonferenza media descritta dalla retta CX.

3°. se AB è obbliqua ad AM senza segarlo (*Fig.* 87.), ella descriverà la superficie d' un cono troncato, ed egli ci è noto, che questa superficie equivale al lato AB del cono tronco moltiplicato per la circonferenza descritta dal raggio medio CX. 4°. finalmente, se AB è parallela ad MN, ella descrive la superficie d'un cilindro, e già si sà, che questa superficie è uguale all' altezza AB del cilindro moltiplicata per la circonferenza del raggio BN, ovvero del suo eguale CX.

257. PROPOSIZIONE XLIII. *Se più linee* AB, BC, CD (Fig. 89.) *girano intorno ad un' asse di moto* MN, *dico; che la superficie, ch' esse descriveranno facendo un' intera rivoluzione, è uguale al prodotto della somma delle linee moltiplicata per la circonferenza, che 'l loro centro di gravità descriverà intorno all' asse di moto.*

Si concepisca, che le linee AB, BC, CD sieno tre leve cariche in tutt' i suoi punti di pesi eguali. E' manifesto, che 'l centro di equilibrio de' pesi, che sono sulla leva AB, sarà sul punto medio H, e ch' in conseguenza la somma delle forze di tutti questi pesi, girando intorno ad MN, sarà uguale alla forza, ch' essi avrebbero, se fossero tutti trasportati in H, e girassero intorno ad MN. Per la stessa ragione, la somma delle forze de' pesi, che son sulla leva BC, sarà uguale alla forza, ch' essi avrebbono, se fossero trasportati al loro centro E d'equilibrio su questa leva; e la somma delle forze de' pesi, che son sulla leva CD, sarà uguale alla forza, ch' avrebbono, se fossero trasportati al loro centro F d'equilibrio sopra detta leva. Onde concependo, che tutt'i pesi, i quali sono sopra la leva AB, sien trasportati in H, e che quelli, i quali son sopra la leva BC, sieno trasportati in E, tirando la linea HE, la forza di detti pesi, posti gli uni in H, e gli altri in E, sarà uguale a quella, ch' essi avrebbero, se fossero tutti trasportati al loro centro d'equilibrio R sulla leva HE; e con simile ragionamento troveremo, ch' essendo tutt' i pesi delle leve AB, BC trasportati in R, e quei della leva CD al loro centro F d'equilibrio su questa leva, la somma delle forze de' pesi posti in R ed F sarà uguale a quella, ch' avrebbono tutt' i pesi, se fossero trasportati in P, ch' è il loro centro d'equilibrio comune: così tutt' i pesi trasportati ne' loro primieri siti avrebbon tanta forza girando intorno ad MN, quanta ne avrebbero, se si trasportassero in P, e si facesser girare intorno ad MN. Ma la somma delle forze de' corpi posti nel loro sito è la som-

ma

ma de' prodotti di cadaun corpo per la sua velocità, o per la circonferenza da ciascun di loro descritta; e la forza de' pesi trasportati in P è la somma de' prodotti di tutt'i pesi moltiplicati per la circonferenza descritta dal centro comune d' equilibrio P; onde la somma dei prodotti de' pesi per le circonferenze, che cadaun di loro descrive nel suo sito, è uguale alla somma de' pesi moltiplicata per la circonferenza descritta dal centro d' equilibrio comune P intorno all' asse di moto MN.

Ora i punti componenti le tre linee AB, BC, CD sono fra loro come i pesi, per essere tutti fra lor' uguali; dunque la somma de' prodotti di questi punti per le circonferenze, che ciascun di loro descrive nel suo sito (il che altro non è se non se la stessa somma delle circonferenze), equivale alla somma de' punti, cioè alle tre linee AB, BC, CD moltiplicate per la circonferenza descritta dal centro di gravità comune P.

258. COROLLARIO. Quindi ne segue, che se un piano ABCD gira intorno all' uno de' suoi lati AD, e fa un' intera rivoluzione, conoscerem la superficie del solido, ch' egli descriverà, moltiplicando le tre linee AB, BC, CD per la circonferenza dal loro centro di gravità P descritta intorno AD.

E se un piano ABCD (*Fig. 90.*) gira intorno ad un' asse MN, il quale non è alcuno de' lati della Figura, conoscerem la superficie del solido descritto dall' intera rivoluzione, moltiplicando le quattro linee AB, BC, CD, AD per la circonferenza dal loro centro di gravità descritta intorno ad MN.

La differenza, che passa fra la Figura 89 e la 90, si è, che nella prima il lato AD, essendo l'asse di moto, non descrive alcuna superficie, ed in conseguenza la superficie del solido descritto dalla rivoluzione della Figura non è composta che di tre superficie, le quali descrivono l'altre tre linee; là dove nella Figura 90 tutte le quattro linee AB, BC, CD, AD descrivon delle superficie appartenenti al solido avente un voto nel mezzo.

259. PROPOSIZIONE XLIV. *Se un Piano* ABCD (Fig. 91.) *gira intorno ad un' asse di moto* MN, *il solido prodotto da un' intera rivoluzione è uguale al prodotto di questo piano moltiplicato per la circonferenza dal suo centro di gravità descritta intorno all' asse di moto.*

Il piano ABCD non è che la somma de' suoi elementi BG, RS, ec. onde se si concepisce, che ciascuno di questi elementi

sia

sia una leva carica in tutte le sue parti di pesi eguali, la forza de' pesi della leva BC girando intorno ad MN sarà uguale alla forza, ch'essi avrebbono, se fossero tutti trasportati al loro centro d'equilibrio H su questa leva: così la somma de' pesi moltiplicati per la circonferenza da H descritta intorno ad MN sarà uguale alla somma de' pesi moltiplicati ciascuno per la circonferenza, che cadaun di loro descrive nel suo sito; e mercè ch'i punti della linea BC sono fra se come i pesi, troveremo, che la somma de' punti moltiplicati per la circonferenza descritta dal punto H (cioè la linea BC moltiplicata per detta circonferenza) è uguale alla somma de' medesimi punti moltiplicati per le circonferenze, che ciascun di loro descrive nel suo sito, cioè alla somma delle circonferenze, e conseguentemente alla superficie dalla linea BC descritta girando intorno ad MN.

Per la medesima ragione, la somma delle forze de' pesi, che sono sulla linea RS, sarà uguale alla forza ch' essi avrebbono, se fossero posti nel loro centro d'equilibrio L sopra questa linea; e la retta RS moltiplicata per la circonferenza, che 'l punto L descrive intorno ad MN, sarà uguale alla superficie composta di tutte le circonferenze, che da' suoi punti saran descritte, cioè alla superficie, che dalla linea RS verrà descritta girando intorno ad MN, e così dell'altre.

Posto dunque, che tutt'i pesi, i quali sono sopra BC, non fossero ch'un sol peso posto in H; che tutti quelli, i quali sono sopra RS, non fossero ch' un sol peso collocato in L, e così a mano a mano: tutt'i pesi H, L, F, ec. saranno fra loro come le rette BC, RS, PQ, ec. perchè la somma de' pesi posti in H sarà uguale alla somma de' pesi della linea BC, siccome la linea BC è uguale alla somma de' suoi punti; perchè 'l peso posto in L sarà pure uguale alla somma de' pesi della linea RS, siccome la linea RS è uguale alla somma de' suoi punti; e così successivamente.

Ora i pesi posti in H, L, F, ec. avranno un centro d'equilibrio, ch'io suppongo essere il punto X; onde la somma de' pesi H, L, F, ec. moltiplicata per la circonferenza, che 'l punto X descrive intorno ad MN, sarà uguale alla somma de' prodotti degli stessi pesi per le circonferenze, ch'essi descrivono ne' loro siti H, L, F ec. così, perchè le linee BC, RS, PQ, ec. son nella stessa ragione de' pesi H, L, F, ec. la somma di queste linee moltiplicate per la circonferenza descritta dal punto X sarà uguale alla somma delle medesime linee moltiplicate per le circonferenze

renze descritte da' punti H, L, F, ec. Ma la somma delle linee altro non è che'l piano ABCD, ed altro pure non è quella delle linee moltiplicate per le circonferenze descritte da' punti H, L, F, ec. se non se la somma delle superficie da queste stesse linee descritte intorno ad MN; dunque il piano ABCD moltiplicato per la circonferenza descritta dal punto X è uguale alla somma delle superficie descritte da' suoi elementi, cioè al solido dal piano ABCD descritto girando intorno ad MN.

260. COROLLARIO. Se'l piano ABCD non facesse che la metà, il terzo, o'l quarto, ec. della sua rivoluzione, il solido descritto non sarebbe che la metà, il terzo, o'l quarto, ec. del prodotto del piano ABCD moltiplicato per la circonferenza, che X descriverebbe in un'intera rivoluzione. Perocchè i pesi posti sopra tutt'i punti delle linee BC, RS, ec. non descriverebbero che la metà, il terzo, o'l quarto delle lor circonferenze, non meno che i loro centri d'equilibrio H, L, F, ec. sopra dette linee; tal che tutt'i pesi della linea BC moltiplicati per la metà, il terzo, o'l quarto delle loro circonferenze sarebbero uguali alla somma de' pesi posti al centro H d'equilibrio moltiplicata per la metà, il terzo, o'l quarto della circonferenza, che verrebbe descritta dal punto H; ed in conseguenza la linea BC moltiplicata per la metà, il terzo o'l quarto della circonferenza descritta da H sarebbe uguale alla somma dei prodotti de' suoi punti moltiplicati per la metà, il terzo, o'l quarto delle loro circonferenze, cioè alla metà, al terzo, o al quarto della somma delle circonferenze, ovvero della superficie, descriverebbesi della linea BC; il che pure avverria rispetto all'altre linee; ond'egli è facile a conchiudere, che la somma delle linee, cioè'l piano ABCD moltiplicato per la metà, il terzo, o'l quarto della circonferenza, che dal loro centro comune di gravità X descriverebbesi intorno ad MN, sarebbe uguale alla somma de' prodotti delle stesse linee moltiplicate ciascuna per la metà, il terzo, o'l quarto delle circonferenze, che da' loro centri particolari di gravità H, L, F, ec. si descriverebbero.

261. COROLLARIO II. Quindi n'avviene, che dato'l valore d'un piano ABCD, il quale giri intorno ad un'asse di moto MN, e la distanza dal suo centro di gravità X all'asse di moto, si conoscerà eziandio non solo il solido descritto da questo piano durante un'intera rivoluzione, ma anche quello da esso descritto nella metà, nel terzo, o quarto, ec. della sua rivoluzione;

pe-

perocchè data la distanza dal punto X all'asse MN si può facilmente conoscer la circonferenza da questo punto descritta.

262. PROPOSIZIONE XLV. *Se un solido* ABCDEF (Fig. 92.) *è descritto dalla rivoluzione d'un piano* ABCD *intorno ad un' asse di moto* MN, *si potrà sempre trovare un Prisma tronco, la cui base sia simile e uguale al piano* ABCD, *ed equivaglia al piano* ABCDEF.

Piglio una base *abcd* uguale e simile al piano ABCD: così, se questa base girasse intorno alla linea *mn* similmente posta rispetto a questo piano come MN lo è rispetto al piano ABCD, ella descriverebbe un solido uguale, e simile al solido ABCDEF; e nella base *abcd* tirando gli elementi *ba*, *gf*, *bi*, ec. perpendicolari ad *mn*, osservo, che quelli, i quali andassero a terminare alla retta *mn*, descriverebbero de' circoli, girando intorno a detta linea: che quelli, come *pq*, i quali non andassero a terminare sopra *mn*, descriverebbon delle corone, imperocchè prolungando *pq* in *r*, la retta *pr* descriverebbe un circolo, da cui e' si dovria sottrar' il circolo descritto dalla parte esterior *qr*; il che darebbe la corona descritta da *pq*, e così a mano a mano: finalmente io osservo, che 'l solido descritto dalla rivoluzione del piano *abcd* equivarrebbe alla somma dei circoli e delle corone, cui gli elementi di esso piano descriverebbero intorno ad *mn*.

Ora, io lascio 'l piano *abcd* immobile nella sua posizione orizzontale, e sopra l' elemento *ba* alzo perpendicolarmente al piano un triangolo rettangolo *ab*P, la cui base si è l' elemento *ba*, e l' altezza *b*P equivale alla circonferenza, che l' elemento *ba* descriverebbe girando intorno ad *mn*. Così 'l triangolo *ab*P equivale al circolo, che dall'elemento *ba* si descriverebbe; sapendosi già, ch'un triangolo rettangolo, di cui l'uno de' due lati perpendicolari è uguale al raggio d'un circolo, e l' altro alla circonferenza, equivale al circolo. Lo stesso io faccio sopra *ef*, *bi*, ec. che terminano alla linea *mn*, ed ho in conseguenza tanti triangoli rettangoli, quanti sono i circoli descritti dagli elementi; ed ogni triangolo è uguale al circolo corrispondente.

Quanto agli elementi, come *pq*, che non vanno a terminare sopra *mn*, li prolungo, finchè seghino *mn*. Sopra *pr* costruisco un triangolo rettangolo *prt* avente *pr* per base, e per altezza la circonferenza, che da *rp* sarebbe descritta intorno ad *mn*, e sopra la parte esterior *qr* ne costruisco un'altro *qrs*, il quale abbia *qr* per base, e per altezza la circonferenza, che da *qr* si descriverebbe intorno

no ad *mn*. Così simili essendo i triangoli *ptr*, *qrs*, perchè le lor basi sono alle loro altezze, come il raggio del circolo è alla circonferenza, l'ipotenusa *sr* del triangolo *qsr* sarà parte dell'ipotenusa *tr* del triangolo *tpr*; ed in conseguenza dal triangolo *tpr*, uguale al circolo che da *pr* si descriverebbe, sottraendo il triangolo *qsr*, uguale al circolo che descriverebbesi da *qr*, resterebbe il trapezoide *ptsq*, uguale alla corona che *pq* descriverebbe intorno ad *mn*: ora lo stesso facendo rispetto agli altri elementi, come *pq*, avrò tanti trapezoidi, quante sono le corone descritte da questi elementi; e ciascun trapezoide sarà uguale ad ogni corona.

Perchè dunque il solido descritto dalla rivoluzione di ABCD intorno ad MN altro non è se non se la somma dei circoli e delle corone, che i suoi elementi descrivono intorno ad MM, e perchè la somma dei triangoli rettangoli, e de' trapezoidi fatti sopra gli elementi di *abcd*, ovvero ABCD è uguale alla somma dei circoli e delle corone, così ne segue, che 'l solido formato dai circoli, e dalle corone equivale al solido formato dai triangoli, e trapezoidi: ma il solido formato dai triangoli e trapezoidi è un prisma tronco, la cui base equivale al piano ABCD; imperocchè l'altezze de' triangoli e trapezoidi, essendo perpendicolari intorno al perimetro *abcd*, formano una superficie prismatica, e l'ipotenuse *Pa*, *og*, ec. de' triangoli rettangoli unite alle parti d'ipotenuse *ts* de' trapezoidi, essendo ugualmente inclinate sopra la base *abcd* mercè che tutt'i triangoli son simili, formano un piano, il quale sega obbliquamente la superficie prismatica. Dunque il solido descritto dalla rivoluzione del piano intorno ad MN è uguale ad un prisma fatto sulla base *abcd*.

Se 'l piano ABCD (*Fig.* 93.) girasse intorno ad un'asse MN lontano dalla sua base, allora tutti gli elementi *fc*, *bd*, ec. del piano *abcd* descriverebbero, girando intorno ad *mn*, delle corone; e in vece di queste ponendo de' trapezoidi a dette corone uguali, e perpendicolari agli elementi, s'avrebbe un prisma tronco *abcdrgpn* uguale al solido descritto dalla rivoluzione del piano *abcd* intorno ad *mn*, ma il cui piano inclinato segherebbe obbliquamente tutt'i lati del prisma, e non passerebbe, come il precedente, per l'estremità della base.

263. **PROPOSIZIONE XLVI.** *Qualunque prisma retto tronco da un piano inclinato o è uguale al solido, che dalla sua base verrebbe descritto girando intorno alla linea, per cui 'l piano*

 no

no inclinato sega la base prolungata se sia d' uopo, od è minore, o maggiore.

Sia'l prisma ABCDQP (*Fig. 94.*) tronco dal piano PQDA, che passa pel lato AD della sua base ABCD. Nella detta base io tiro gli elementi BA, *fg*, ec. perpendicolari al lato AD, intorno a cui io concepisco che giri la base ABCD: così tutti gli elementi di questa base descriveran dei circoli, e delle corone, se alcuni se ne trovano, che non terminino all' asse di moto *mn*: onde in vece dei circoli, e delle corone ponendo de' triangoli rettangoli e de' trapezoidi uguali ai circoli ed alle corone, avrò un prisma troncato da un piano obbliquo, che passerà per *mn*. Ora, se questo piano formato dall' ipotenuse, e parti d'ipotenuse è tanto inclinato sopra la base ABCD, quanto lo è il piano PADQ, questi due piani non ne saranno ch' un solo, e'l prisma formato dai triangoli e trapezoidi sarà uguale al prisma ABCDQP: ma se questo piano è più inclinato del piano PADQ, p. e. il piano RADS, il prisma ABCDSR, formato dai triangoli e trapezoidi, sarà minore del prisma ABCDQP, il ch' è evidente; e se'l medesimo è meno inclinato del piano ADQP, egli è ancora manifesto, che 'l prisma formato dai triangoli e trapezoidi sarà maggiore del prisma ABCDQP.

Lo stesso dicasi, se'l piano inclinato PQHV (*Fig. 95.*) del prisma tronco ABCDVQPH segasse la base prolungata in una linea MN, il che non ha bisogno di dimostrazione.

264. **PROPOSIZIONE XLVII.** *Qualunque prisma retto tronco da un piano obbliquo all' orizzonte è uguale al prodotto della sua base moltiplicata per la perpendicolare eretta sul centro di gravità di essa base, e compresa fra la base e'l piano segante.*

Sia'l prisma ABCDQP (*Fig. 96.*) tronco da un piano inclinato PQDA, che passa pel lato AD della sua base, e di cui suppongo, che'l centro di gravità della base ABCD sia'l punto X. Se questo prisma equivale al solido, che dalla sua base verrebbe descritto girando intorno ad AC, tutt' i triangoli e trapezoidi alzati perpendicolarmente sopra gli elementi della sua base perpendicolare ad AD saranno uguali ciascuno a ciascuno ai circoli e alle corone, che questi elementi descriverebbero girando intorno AD, e tutte l' altezze di questi triangoli saranno uguali ciascuna a ciascuna alle circonferenze dei circoli, e delle corone; in oltre il triangolo rettangolo ZXO alzato perpendicolarmente sopra la distanza XO dal centro di gravità all' asse AD, essendo simile

simile agli altri triangoli, sarà altresì uguale al circolo, che XO descriverebbe, e la sua altezza XZ sarà pure uguale alla circonferenza di esso circolo: ma 'l solido descritto dalla rivoluzione delle base, cioè la somma de' circoli e delle corone, cui descriverebbero gli elementi della base, sarebbe uguale alla base moltiplicata per la circonferenza di XO, cioè per la circonferenza, che descriverebbesi dal centro X; onde la somma dei triangoli e trapezoidi, cioè 'l prisma dee parimente esser' uguale alla stessa base moltiplicata per la retta XZ uguale alla circonferenza, che da X si descriverebbe, cioè per la perpendicolare innalzata sul centro di gravità X, e compresa fra la base e 'l piano inclinato.

Se 'l prisma ABCDQP è minor del solido, che dalla sua base verrebbe descritto girando intorno AD, sarà pur vero, che tutt' i triangoli PAB, *ofg*, ec. di cui egli è composto, saran simili, mercè ch' il piano inclinato fa dovunque colla base uno stesso angolo: così noi avremmo PB . BA : : *of* . *fg*, cioè, se l'altezza PB dell' uno non è, p. e. se non la metà della circonferenza, che descriverebbesi dalla sua base BA, l'altezza *of* dell' altro non sarà parimente se non se la metà della circonferenza, che dalla sua base *fg* si descriverebbe, e così degli altri; donde avviene, che tutt' i triangoli rettangoli, i quali si formerebbero sopra le stesse basi BA, *gf* uguali ai circoli, che descriverebbonsi da dette basi, avrebbon l' altezze doppie dell' altezze BP, *of*, ec. e sarebbero in conseguenza doppj de' triangoli BPA, *ofg*, di cui 'l prisma è composto.

Quanto ai trapezoidi contenuti nel prisma, p. e. il trapezoide *sart*, manifesto apparisce, ch' altro non essendo questo trapezoide se non se il triangolo *nsu* meno il triangolo *rtu*, non dee parimente detto trapezoide essere se non la metà della corona, che l'elemento *st* descriverebbe girando intorno AD; perocchè non avendo il triangolo *nsu* se non la metà dell' altezza di quello, che sarebbe formato sopra la stessa base *su*, e ch' equivarria al circolo, cui *su* descriverebbe intorno AD, egli non è pure se non se la metà di detto circolo; e perciò anche il triangolo *rtu* non è se non la metà di quello, che sarebbe formato sopra la stessa base *tu*, e ch' equivarria al circolo, cui *tu* descriverebbe: così 'l trapezoide *nrts*, cioè 'l triangolo *nsu* meno il triangolo *rtu* non dee esser se non la metà del trapezoide, che s'avrebbe, togliendo dal triangolo uguale al circolo di *su* il triangolo eguale al circolo di *tu*; finalmente, anche nel triangolo XZO

fatto sopra la distanza XO dal centro X di gravità all'asse AD di moto, l'altezza XZ non è che la metà della circonferenza, cui XO descriverebbe.

Perchè dunque tutt'i triangoli e trapezoidi del prisma ABCDPQ non sono se non le metà dei circoli e delle corone, che comporrebbero il solido formato dalla rivoluzione della base, secondo l'ipotesi da noi fatta, così ne segue, il prisma non dover'essere che la metà di questo solido: ma il solido formato dalla rivoluzione della base è uguale al prodotto della base per la circonferenza, che da X sarebbe descritta; onde il nostro prisma esser dee uguale al prodotto della base per la metà di detta circonferenza, e conseguentemente per la perpendicolare XZ alzata sopra'l centro di gravità, e compresa fra la base e'l piano inclinato.

Lo stesso noi proveremmo, se'l prisma BADCQP fosse maggiore del solido, che la sua base descriverebbe girando intorno AD, come ancora, se'l piano inclinato del prisma segasse tutt'i lati di detto prisma, e non incontrasse la base se non dopo averla prolungata in MN (*Fig.* 95.).

265. PROPOSIZIONE XLVIII. *La superficie d'un prisma tronco è uguale alla somma delle linee, che servono di basi alle parti di detta superficie, moltiplicata per la perpendicolare eretta sul centro comune d'equilibrio di esse linee, e compresa fra la base e'l piano inclinato.*

Sia'l prisma tronco ABCDQP (*Fig.* 97.), le cui linee AB, BC, CD servono di base alla superficie, non ne sostenendo la linea AD veruna parte, perchè il piano inclinato passa per detta linea. Supponiamo pure, che'l centro di gravità comune alle tre linee AB, BC, CD sia'l punto X diverso dal centro di gravità della base ABCD.

Il prisma ABCDQP o è uguale, o minore, ovvero maggior del solido, che la sua base descriverebbe girando intorno AD. Supponiamolo prima eguale: altro non è la sua superficie, se non che la somma delle rette alzate perpendicolarmente sopra la base da tutt'i punti delle linee AB, BC, CD, e terminate al piano inclinato, che tronca il prisma: ma queste linee son'uguali ciascuna a ciascuna alle circonferenze, che detti punti descriverebbero girando intorno AD; perocchè, dai punti B, *f*, ec. tirando delle rette BA, *fg*, ec. perpendicolari ad AD, e da' punti A *g*, ec. conducendone dell'altre AP, *go*, ec. che terminino all'estremità P, *o* delle perpendicolari, e ch'in conseguenza saran sul

piano

piano inclinato APQD, i triangoli simili BPA, *gfo*, ec. equivarranno ai circoli, che descriverebbonsi dalle lor basi BP, *fg*, ec. e le rette BP, *fo*, ec. alle circonferenze, e così in altri casi. Però la superficie del prisma è composta di tante rette, quante sono le circonferenze, che comporrebbero la superficie del solido descritto dalla rivoluzione della base; ed equivalendo ogni retta linea ad ogni circonferenza, la superficie del prisma equivale a quella del solido descritto dalla rivoluzione della base: ma la superficie di questo solido equivale alla somma delle linee AB, BC, CD moltiplicate per la circonferenza, che descriverebbesi dal loro centro di gravità X; onde la superficie del prisma è uguale alla somma delle stesse linee moltiplicate per l'altezza XZ uguale alla circonferenza, che da X si descriverebbe, mercè che nel triangolo rettangolo ZXO simile agli altri PBA, ec. l'altezza equivale alla circonferenza, il cui raggio sarebbe la base XO.

Ora, se'l prisma è minore del solido prodotto dalla rivoluzione della base, il piano inclinato PQDA è conseguentemente più inclinato sopra la base di quello sia il piano inclinato del prisma, ch'equivarrebbe al solido prodotto dalla rivoluzione della base; e perchè tutt'i triangoli rettangoli BPO, *ofg*, XZO, ec. son simili, le loro altezze BP, *fo*, XZ, ec. avran tutte lo stesso rapporto alle lor basi BA, *fg*, XO, ec. posto dunque, che l'altezza BP non sia se non la metà della circonferenza, che descriverebbesi dalla base BA, tutte l'altre altezze non saran pure che la metà delle circonferenze delle lor basi; e però la superficie del prisma è uguale alla metà della superficie del solido descritto dalla rivoluzione della base. Ora la superficie di questo solido è uguale alla somma delle linee AB, BC, CD per la circonferenza descritta dal loro centro di gravità X; onde la superficie del prisma dee equivalere alla somma delle stesse linee moltiplicata per la retta XZ, la quale, nell'ipotesi da noi fatta, non è che la metà della circonferenza descritta dal punto X.

Lo stesso noi proveremmo, se'l prisma fosse maggiore del solido descritto dalla rivoluzione.

Se'l piano inclinato PSRQ (*Fig.98.*) del prisma ABCDRSPQ segasse tutt'i lati del prisma innanzi di segar la base in MN, allora ciascuna delle quattro linee AB, BC, CD, DA sosterrebbe una porzione della superficie; e proverebbesi come sopra, equivalere la superficie del prisma alla somma di queste quattro linee mol-

moltiplicata per la perpendicolare eretta ful loro centro di gravità comune X, e compresa fra la base e 'l piano inclinato.

AVVERTIMENTO. Se trovata la superficie d' un prisma tronco v'aggiugniamo ad essa la base, e 'l piano inclinato, noi avrem l'intera superficie.

266. PROPOSIZIONE XLIX. *Qualunque prisma inclinato* ABCDEH (Fig. 99.), *e tronco da un piano inclinato alla sua base equivale ad un prisma retto d'ugual base, ed avente tutte l'altezze uguali ciascuna a ciascuna a quelle del prisma inclinato.*

Prendo un piano *abcd* uguale e simile al piano ABCD della base; in *b* io alzo una retta *bb* perpendicolare al piano *abcd*, ed uguale all'altezza HY del limite BH, cioè alla perpendicolare condotta dal punto H sopra la base ABCD prolungata; alzo in *c* la retta *ce* perpendicolare al piano *abcd*, ed uguale all'altezza EZ del limite CE, e tirando le rette *ba*, *ed* ho un prisma retto tronco *abcdeb*, uguale al prisma inclinato tronco ABCDEH: il che io provo nel seguente modo.

Nelle due basi ABCD, *abcd* tiro gli elementi AB, RQ, ec. *ab*, *rq*, ec. perpendicolari a' lati eguali AD, *ad*, per cui passano i piani inclinati AHED, *abed*. Concepisco, che sopra questi elementi sieno alzati de' piani perpendicolari alle basi ABCD, *abcd*; e quei, che sono sopra gli elementi AB, RQ, ec. *ab*, *rq*, ec. i qua'i terminano ai lati eguali AD, *ad* saranno de' triangoli AHB, RPQ, ec. *abb*, *rpq*, ec. siccome quei, che sono sopra gli elementi, come TS, ec. *ts*, ec. che non vanno a terminare ai lati eguali AD, *ad*, saran de' trapezoidi TXVS, ec. *txus*, ec. e in amendue i prismi vi sarà un'egual numero di triangoli e trapezoidi, le cui basi AB, RQ, TS, ec. saranno uguali ciascuna a ciascuna alle basi *ab*, *rq*, *ts*, ec.

Ora i due triangoli AHB, *abb* son' uguali, a cagione della base AB uguale alla base *ab*, e dell'altezza HY uguale all'altezza *bb*: ma il triangolo AHB è simile a tutt'i triangoli RQB, ec. formati sopra gli elementi RQ, ec. che terminano sopra AD, e 'l triangolo *abb* è simile a tutt'i triangoli *rpq*, ec. formati sopra gli elementi *rq*, ec. che terminano sopra *ad*; onde paragonando il triangolo AHB coll'uno de' suoi simili RQP, dal cui vertice abbasseremo la perpendicolare PL sul piano della base ABCD per avere l'altezza di questo triangolo, avremo AB. RQ :: HY. PL, cioè le basi di questi triangoli sono fra loro come l'altezze; e comparando parimente il triangolo *abb* col suo simile

rqp,

rqp, la cui base *rq* è uguale alla base del triangolo RQP, avremo *ab*. *rq* : : *bb*. *pq* : ma *ab* = AB, ed *rq* = RQ; però AB. RQ : : *bb*. *pq*, e quindi HY. PL : : *bb*. *pq* : ma HY = *bb*; dunque PL = *pq*, e conseguentemente i triangoli RQP, ed *rqp* son' uguali, perchè hanno uguali le basi RQ, *rq*, non meno che l' altezze PL, *pq*. Lo stesso pure avverrà di tutti gli altri triangoli.

I trapezoidi TXVS, ec. *txus*, ec. formati dagli elementi TS, ec. *ts*, ec. che non vanno a terminare ai lati eguali AD, *ad*, altro non sono se non che i triangoli NVS, *nus*, formati dai prolungamenti de'loro lati non paralleli, meno i piccioli triangoli NXT, *nxt*, cioè TXVS = NVS — NTX, e *txus* = *nus* — *ntx*: ma i triangoli NVS, NTX, ed *nus*, *ntx* son simili i primi al triangolo AHB, ed i secondi al triangolo *ahb*; però noi mostrerem come sopra, che NVS = *nus*, NTX = *ntx*, e conseguentemente NVS — NTX = *nus* — *ntx*, ovvero TXVS = *txus*.

Perchè dunque in amendue i prismi evvi un' egual numero di triangoli e trapezoidi, e perchè ogni triangolo equivale ad ogni triangolo, e cadaun trapezoide a ciascun trapezoide, i due prismi son perfettamente uguali.

267. Quindi si deduce un metodo facilissimo di misurare i prismi inclinati tronchi; imperocchè, essendo il prisma inclinato tronco ABCDEF (*Fig.* 100.) uguale al prisma retto troncato *abcdef*, di cui tutte l'altezze son' uguali all'altezze del prisma inclinato, ed equivalendo il prisma retto al prodotto della sua base per la perpendicolare *xt* innalzata sopra'l suo centro di gravità e compresa fra le due basi, il prisma inclinato sarà uguale al medesimo prodotto: ora, simili essendo nel prisma retto i triangoli *bcf*, *rxt*, trovasi la perpendicolare *tx*, facendo *bc*. *cf* : : *rx*. *xt*; e *cf* è uguale all'altezza FQ del triangolo BCF del prisma inclinato, siccome *bc* lo è a BC, ed *rx* ad RX. Dunque, dopo aver preso la base BC, e l'altezza FQ dell'uno de' triangoli del prisma inclinato, conviene cercar' una quarta proporzionale a BC, FQ, e alla distanza RX dal centro di gravità X della base al lato BA, per cui passa il piano inclinato; e questa quarta proporzionale sarà la quantità, per cui noi dovrem moltiplicar la base ABCD, a fin d'avere il valor del prisma troncato.

268. S' osservi bene, che quantunque il prisma retto *abcdef* (*Fig.* 100.) sia uguale al prisma inclinato ABCDEF, tuttavolta

ta la superficie del prisma retto non è uguale a quella dell' inclinato, trovandosi nella superficie del prisma inclinato de' piani inclinati, i quali fan parte della sua superficie, e non equivagliono a' piani retti del prisma retto, che fan parte della sua; però non si può dire, come si fa della superficie del prisma retto, che la superficie dell' inclinato sia uguale alla somma delle linee che la sostengono, moltiplicata per la perpendicolare eretta sul centro di gravità della base di questa superficie, e compresa fra la base e'l piano inclinato del prisma retto. Quindi è, ch'in tali casi, a fine d'avere la superficie del prisma inclinato, convien cercar' a parte i valori di tutte le sue facce.

269. AVVERTIMENTO. Dalle cose finora dette chiaramente scorgesi di qual vantaggio egli sia per la Geometria il metodo de' centri di gravità; poichè, dato qualunque piano, che gira intorno ad un' asse di moto, e la circonferenza, cui descrive il suo centro di gravità, non solo si può conoscer' il solido descritto da questo corpo, ma eziandio qualunque prisma tronco retto, od inclinato formato sopra esso piano, e 'l cui piano inclinato passasse per l'asse di moto; come pure, date le linee, che descrivono la superficie del solido, e la circonferenza descritta dal suo centro di gravità, si può conoscer la superficie del solido, e quella di tutt'i prismi retti tronchi fatti sopra la stessa base, e 'l cui piano inclinato passasse per l'asse di moto. Ma tutto 'l difficile consiste in trovare il centro di gravità dei differenti piani, e delle differenti linee componenti 'l circuito d'una figura; e ciò è quello, a cui non senz' alcun' indugio ci applicheremo.

270. *Il centro di gravità d'una linea* AB (Fig. 101.) *è sopra 'l mezzo* C *di detta linea*.

Imperocchè, se si concepisce, che questa linea sia in tutt'i suoi punti carica di pesi eguali, non vi saran più pesi alla sinistra di C ch'alla sua dritta, e conseguentemente tutt'i suoi pesi saranno in equilibrio intorno al punto C.

271. Per trovare il centro di gravità di più linee AB, BD, DH, giugno i centri di gravità C, E delle due prime colla retta CE; sego questa retta in due parti CL, LE reciproche alle due linee, cioè faccio CL. LE : : BD. BA; pongo CL dal lato di BA, ed LE da quello di BD, e'l punto L è'l centro d' equilibrio delle due linee AB, BD. Da L pel mezzo G del centro di gravità della linea HD tiro la retta LG; sego questa retta in due parti reciproche alla somma delle due AB, BD, e alla

retta

retta HD, cioè faccio LM . MG : : HD . AB + BD ; finalmente pongo LM dal lato di L, ed MG da quello di HD, e'l punto M è'l centro comune d'equilibrio delle tre linee AB, BD, DH.

Imperocchè concependo, che le tre linee fieno in tutt'i loro punti cariche di pesi eguali, i centri di gravità sopra ciascuna di queste linee saranno i punti C, E, G mezzi di dette linee; onde se si considera CE come una leva, tutt'i pesi della linea AB tanto peseranno su questa leva, come se fossero posti al loro centro d'equilibrio C, e tutti quelli della linea BD tanto peseran su detta leva, come se posti fossero al loro centro d'equilibrio E: ora tutt'i pesi della linea AB essendo collocat' in C, dove non saranno ch'un sol peso, e quei della linea AD essendolo in E per non sarvi ch'un sol peso, è manifesto, che 'l peso C sarà al peso E, come la linea AB alla linea BD, mercè che'l peso C è composto di tanti pesi eguali, quanti sono i punti componenti la linea AB, e 'l peso E di tanti pesi parimente eguali, quanti sono i punti componenti la linea BD; così 'l centro comune di gravità de' pesi C, E sulla leva CE sarà pure il punto L, poichè le distanze CL, LE saran reciproche a' pesi E, C, siccom' esse lo sono alle rette BD, AB.

Ora, considerando la retta LG come una leva, i pesi C, E tanto peseranno su questa leva, come se fossero posti al loro centro d'equilibrio L, e tutt'i pesi, che sono sulla leva HD, tanto peseran sulla leva LG, come se posti fossero al loro centro d'equilibrio G per non sarvi ch'un sol peso, così li due pesi C, E, collocati in L per non farvi ch'un sol peso, sarebbero al peso G, come la somma delle due linee AB, BD è alla retta HD; e per conseguente il loro centro comun di gravità sarebbe 'l punto M, poichè le distanze LM, MG sarebbon reciproche al peso G, e al peso L composto dei due C, E.

272. *Il centro di gravità di qualunque rettangolo e parallelogrammo* ABCD (Fig. 102.) *è sopra 'l mezzo* X *della retta* EH, *che sega due lati opposti* BC, AD *ciascuno per mezzo ne' punti* E, H.

Tutti gli elementi della figura paralleli a' lati BG, AD son segati per mezzo dalla linea EH; così tutt' i loro centri di gravità sono sopra detta linea, e quindi noi possiamo considerare questi elementi come tanti pesi eguali attaccati a tutt'i punti della linea EH: ora 'l comun centro di gravità di tutti questi pesi

eguali è ful mezzo X della linea EH, tanti pesi essendovi dall' una quanti dall'altra parte di X; onde il centro di gravità di tutti gli elementi, e per conseguenza quello del rettangolo, o parallelogrammo è'l punto X.

273. *Il centro di gravità* X *d'un triangolo* ABC (Fig. 103.) *è distante dall'uno degli angoli* A, *qualunque ei si sia, d'una quantità* AX *uguale ai due terzi della linea* AM *tirata dal vertice* A *sul mezzo* M *del lato* BC *opposto a quest' angolo.*

Segando la linea AM per mezzo in M il lato BC, tutti gli elementi del triangolo parallelo a B son divisi ciascuno in due parti eguali, ed in conseguenza, essendo tutt' i loro centri sopra la linea AM, il loro centro comun di gravità, cioè 'l centro di gravità del triangolo è sopra detta linea AM. Da un'altro angolo B io conduco una retta BR sul mezzo del lato opposto AE, e tutti gli elementi del triangolo paralleli al lato AC essendo pure divisi ciascuno per mezzo da AR, il loro comun centro di gravità, o'l centro di gravità del triangolo dee parimente esser sopra AR: ma già noi abbiam veduto esser questo centro sopra AM; ond'egli di necessità esser dee sul punto X, in cui le due AM, BR reciprocamente si segano.

Dal punto R conduco RN parallela a BC, e segante AM in O; ne' triangoli simili AMC, AOR noi abbiamo MC. OR : : AC. AR: ma AC $=$ 2AR; dunque MC $=$ 2OR, ovvero OR $= \frac{1}{2}$MC $= \frac{1}{2}$MB. Ora i triangoli simili BXM, OXR ci danno BM. RO : : MX. OX; onde BM. $\frac{1}{2}$MB : : MX. OX, e per conseguente OX $= \frac{1}{2}$MX, ed OX $= \frac{1}{3}$OM: ma a cagione de' triangoli simili ACM, ARO, e di AC $=$ 2AR noi abbiamo AM $=$ 2AO $=$ 2OM, e conseguentemente AO $=$ OM; dunque OX essendo 'l terzo di OM, od AO, non è se non il sesto dell'intera linea AM, che giunto alla metà AO di AM fa i due terzi di AM; però il centro di gravità X è distante dai due terzi di AM.

274. Per trovare il centro di gravità d'un trapezoide, o d'un trapezio ABCD (*Fig.* 104.), tiro la diagonale BD, che divide la figura in due triangoli ABD, DBC; nel triangolo ABD dall'uno degli angoli ABD io conduco la retta BM sul mezzo del lato opposto AD, e sopra essa linea prendo BH uguale ai due terzi di BM: così 'l centro di gravità del triangolo ABD è in H. Nel triangolo BDC dall'uno degli angoli DBC io conduco la retta PN sul mezzo del lato opposto DC, e sopra BN pigliando

gliando la parte BP uguale ai suoi due terzi, il centro di gravità del triangolo DBC è'l punto P; giugno colla retta HP i due centri di gravità H, P, e considerando detta linea come una leva, a cui sieno in H e P attaccati due pesi uguali ai due triangoli, divido questa retta in due parti HS, SP reciproche ai pesi, ovvero a' triangoli, vale a dire io faccio HS . SP : : BDC . BAD: così'l punto S è'l centro comune dei due trangoli, e per conseguente il centro di gravità del trapezoide; il che ad evidenza si scorge per i principj sopra stabiliti.

275. A fine di rinvenire il centro di gravità d'una figura irregolare ABCDE (*Fig.* 105.), la quale abbia più di quattro lati, divido la figura in triangoli con linee tirate dall' uno degli angoli B a tutti gli altri, ove sia possibile tirarne. Cerco i centri di gravità H, P, S di questi triangoli; poscia tirando la retta HP, ch'io considero come una leva avente alle sue estremità H, P due pesi, i quali sieno fra loro come i triangoli ABE, BED, cerco sopra questa leva il loro centro comun di gravità R; da R tiro la retta RS, ch'io considero pure come una leva, la quale alla sua estremità R abbia un peso eguale alla somma dei due triangoli ABE, BED, e in S un peso eguale al triangolo BDC; e sopra detta leva cercando'l centro Q d' equilibrio dei due pesi, il punto Q è'l centro di gravità della figura, il che non ha bisogno di dimostrazione.

276. *Il centro di gravità d' un poligono regolare è al centro della figura.*

Se 'l poligono è d' un numero pari di lati, p. e. l' esagono ABCDE (*Fig.* 106.), dall'uno de' suoi angoli D tiro una retta DA all'angolo opposto A; e siccome questa retta divide il poligono in due parti uguali, così'l centro di gravità di queste due parti, cioè dell' esagono esser dee sopra detta linea. Similmente da un'altro angolo E io conduco la retta EB all'angolo opposto, e per l'accennata ragione il centro di gravità della figura dee esser su detta linea; così questo centro ha necessariamente ad essere sul punto d' intersezione O delle due linee. Ma questo punto, come già si sa, è 'l centro della figura; dunque, ec.

Se 'l poligono è d' un numero impari di lati, p. e. il pentagono ABCDE (*Fig.* 107.), dall' uno degli angoli D io tiro la retta DM sul mezzo del lato opposto AB, ed essendo la figura divisa in due parti perfettamente uguali, il suo centro di gravità è sopra detta linea DM. Da un'altro angolo E io con-

V 2 duco

duco la retta EN sul mezzo del lato opposto BC, e per la stessa ragione il centro di gravità della figura è altresì sopra essa linea; dunque questo centro è nel punto O, in cui le due linee DM, EN si segano, e questo punto, come già si sa, è'l centro della Figura.

277. Quindi ne segue, che il centro d'un circolo è'l suo centro di gravità, perchè il circolo è un poligono regolare d'infiniti lati.

278. *Il centro di gravità d'una parabola quadra* ABC (Fig.108.) *è sopra un punto* S *dell'asse* BP *lontano dal vertice d'una distanza* BS *uguale ai tre quinti di detto asse*.

Tiro gli elementi ED, FG paralleli alla base AC, e questi, essendo divisi ciascuno per mezzo dall'asse BP, hanno i loro centri di gravità sopra quest'asse, ed in conseguenza il loro comun centro di gravità, cioè quello della parabola è parimente sopra detto asse; così noi possiamo considerar queste linee come de'pesi, i quali sarebbero attaccati a tutt'i punti della leva BP, e supposto, che questa leva gir'intorno la tangente MN al vertice B, troveremo il comun centro di gravità, moltiplicando ciascun peso, o caduna linea per la sua distanza al punto B, e dividendo la somma dei prodotti per quella de'pesi, o delle linee, il che ci darà la distanza dal comun centro di gravità, o dal centro di gravità della parabola al punto B (*N.* 246.).

Ora, perchè le metà degli elementi ED, FG, ec. son l'ordinate all'asse BP, i quadri di queste metà sono fra loro come l'assisse BL, BO, ec. cioè come le distanze dagli elementi al vertice B della parabola, e quest'assisse, o distanze sono fra se come i numeri 0. 1. 2. 3. 4, ec. in infinito; onde i quadrati della metà degli elementi, ed in conseguenza i quadri degli elementi ED, FG, ec. sono fra loro come i numeri 0. 1. 2. 3. 4, ec. e le lor radici quadre, cioè gli elementi sono fra se come le radici quadrate di questi numeri; però gli elementi formano una serie, il cui esponente, per i principj dell' Aritmetica degl' Infiniti, è $\frac{1}{2}$, e le distanze, od assisse formano una serie 0. 1. 2. 3, ec. il cui esponente è *1*; dunque i prodotti degli elementi per le loro distanze formeranno una nuova serie, il cui esponente sarà la somma $\frac{1}{2} + 1$, ovvero $\frac{3}{2}$ dei due esponenti, e la somma di questi prodotti sarà all' ultimo AC × PB moltiplicato pel numero de'termini PB, come 1 è all'esponente $\frac{3}{2}$ accresciuto dell'unità, o come 1 a $\frac{3}{2} + 1$, o come 1 a $\frac{5}{2}$, o come $\frac{2}{2}$ a $\frac{5}{2}$, o finalmente come 2 a 5, cioè la somma dei pro-

dotti

dotti degli elementi per le loro diſtanze ſarà $\frac{2}{5}AC \times \overline{PB}^2$. Ma la ſomma degli elementi, cioè la parabola è $\frac{2}{3}AC \times PB$, eſſendo ella, come già ſi ſa, i $\frac{2}{3}$ del rettangolo circonſcritto, ovvero del prodotto della baſe per l' altezza; però dividendo $\frac{2}{5}AC \times \overline{PB}^2$ per $\frac{2}{3}AC \times PB$, il quoziente $\frac{6}{10}PB$, ovvero $\frac{3}{5}PB$ ſarà la diſtanza dal centro di gravità della parabola al vertice B.

279. COROLLARIO. Se facciamo un ſomigliante calcolo riſpetto alle prime parabole del 3°. 4°. 5°. grado, ec. cioè riſpetto alla parabola, i cui cubi degli elementi ſono fra loro come l'aſſiſſe, riſpetto a quella, le cui quarte potenze degli elementi ſono fra ſe come l'aſſiſſe, e così a mano a mano, troveremo, che'l centro di gravità di tutte le prime parabole, cominciando dalla quadra, ſono ſopra l'aſſe in una diſtanza dal vertice B dei $\frac{3}{5}$ dell' aſſe, dei $\frac{4}{7}$, dei $\frac{5}{9}$, dei $\frac{6}{11}$, dei $\frac{7}{13}$, e così ſucceſſivamente, tal che il centro di gravità in queſte parabole ſempre più s'avvicinerà verſo la metà dell'aſſe ſenza mai potervi giugnere.

280. Per ciò applicare alla pratica, cerchiamo'l valore del ſolido, che deſcriverebbe la parabola ABC (*Fig.* 109.) girando intorno la tangente MN al vertice. La parabola ABC; eſſendo i due terzi del rettangolo circonſcritto AMND, è dunque $\frac{2}{3}AC \times PB$; e conſeguentemente, ſe moltiplichiamo queſta parabola per la circonferenza, che ſarà deſcritta dall'eſtremità S della diſtanza BS dal ſuo centro di gravità, la qual diſtanza è $\frac{3}{5}PB$, avremo il ſolido deſcritto: ora, chiamando (BP la circonferenza, che deſcriverebbeſi dall'eſtremità P dell'aſſe BP, la circonferenza, che da S verrà deſcritta, ſarà $\frac{3}{5}$ (BP, mercè che le due circonferenze ſono fra ſe come i lor raggi BP, DS: così'l ſolido ſarà $\frac{2}{3}AC \times PB \times \frac{3}{5}$ (BP, ovvero $\frac{6}{15}AC \times PB$ (BP, o finalmente $\frac{2}{5}AC \times PB \times$ (BP, cioè'l ſolido deſcritto dalla rivoluzione della parabola intorno ad MN equivale ai $\frac{2}{5}$ d'un priſma, che ha per baſe il rettangolo circonſcritto AMNC, e per altezza una linea uguale alla circonferenza del circolo, cui l'altezza PB di queſto rettangolo deſcrive intorno ad MN.

Se la parabola è la prima del 3°. grado, cioè ſe i cubi delle ſue ordinate ſono fra ſe come le loro aſſiſſe, troveremo, per le regole dell'Aritmetica degl'Infiniti, eſſer queſta parabola i $\frac{3}{4}$ del rettangolo circonſcritto, cioè $\frac{3}{4}AC \times BP$; e ſiccome la diſtanza dal ſuo centro di gravità alla tangente è $\frac{4}{7}BP$ (*N.* 279.), così

la

la circonferenza del circolo, che da questa linea descriverassi, sarà $\frac{4}{7}$ (BP; onde il solido descritto dalla rivoluzione della parabola intorno ad MN è $\frac{3}{4}$AC × PB × $\frac{4}{7}$ (PB $=$ $\frac{12}{28}$AC × PB × (PB $=$ $\frac{3}{7}$AC × PB × (PB, cioè 'l solido descritto dalla rivoluzione equivale ai $\frac{3}{7}$ del rettangolo circonscritto moltiplicato per la circonferenza del circolo, che descrive l'altezza PB di esso rettangolo.

Troveremo nella stessa guisa, che i solidi formati dalla rivoluluzione delle prime parabole del 4°. 5°. grado, ec. son $\frac{4}{9}$AB × PB × (PB, $\frac{5}{11}$AG × PB × (PB, $\frac{6}{13}$AC × PB × (PB, e così successivamente; e siccome 'l prisma AC × PB × (PB è sempre lo stesso, così ne segue, che le paraboloidi descritte intorno ad MN dalla rivoluzione delle parabole del 2°. 3°. 4°. grado, ec. sono fra loro come $\frac{2}{5}$. $\frac{3}{7}$. $\frac{4}{9}$. $\frac{5}{11}$. $\frac{6}{13}$, ec.

Che se vogliamo sapere i rapporti di queste paraboloidi al cilindro, cui 'l rettangolo circonscritto descrive girando intorno ad MN, si dovrà considerare, ch'essendo 'l centro di gravità di questo rettangolo sul mezzo V di BP, la circonferenza del circolo, cui BT descriverebbe intorno ad MN, si è $\frac{1}{2}$ (BP, e conseguentemente il cilindro esser dee AC × PB × $\frac{1}{2}$ (PB $=$ $\frac{1}{2}$AC × PB × (BP; così questo cilindro non è che la metà del prisma AC × PB × (BP. Dunque la paraboloide descritta dalla parabola quadra, essendo i $\frac{2}{5}$ di AG × PB × (BP, sarà i $\frac{4}{5}$ del cilindro; quello descritto dalla parabola del 3°. grado, essendo i $\frac{3}{7}$ di AG × PB × (PB, sarà in $\frac{6}{7}$ del cilindro; tal che i rapporti delle nostre diverse paraboloidi al cilindro saranno $\frac{4}{5}$. $\frac{6}{7}$. $\frac{8}{9}$. $\frac{10}{11}$. $\frac{12}{13}$, ec.

Si potranno nella stessa maniera trovar' i solidi descritti dalle parabole seconde, terze, ec. di tutt'i gradi, e quei che descrivono tutte le differenti parabole intorno ad un' altro asse di moto preso ad arbitrio, non meno che i rapporti di questi solidi ai cilindri circonscritti; ma io lascio tal cura a coloro, che vorranno a ciò applicarsi.

281. *Il centro di gravità d' una semiparabola quadra* BCP (Fig. 110.) *è un punto* H *lontano dalla tangente* BN *al vertice d' una quantità uguale ai tre quinti dell' asse* BP, *e distante dall' asse d' una quantità uguale ai tre ottavi della base* PC.

Tiro gli elementi MR, TV, ec. paralleli alla base PC, e concependo, che la parabola gir' intorno alla tangente BN, trovo come sopra (*N.* 278.), che 'l suo centro di gravità è lontano da questa tangente d' una quantità uguale ai $\frac{3}{5}$ del suo asse BP:

ma

ma siccome questo centro non può esser sull' asse, così suppongo che la parabola giri intorno l' asse BP. Essendo i centri di gravità degli elementi MR, TV, ec. sopra i loro mezzi Q, X, ec. concepisco questi elementi come tanti pesi, i quali sieno fra loro nel medesimo rapporto di questi elementi, e che sien posti ne' punti Q, X, ec. per trovare il loro centro d' equilibrio comune. Concepisco in oltre, che questi pesi sieno trasportati sull' uno degli elementi, p. e. sopra PC, in modo che le lor distanze all' asse PB sien le medesime di quelle, ch' essi aveano in Q, X, F: così moltiplicando ciascun peso per la sua distanza all' asse, e dividendo la somma dei prodotti per quella de' pesi, il quoziente sarà la distanza dal loro centro d' equilibrio comune all' asse. Ora i pesi, o gli elementi sono fra se come le radici quadre de' numeri 0. 1. 2. 3. 4, ec. e le lor distanze, essendo le metà degli elementi, son parimente nella stessa ragione; onde moltiplicando cadaun termine della serie degli elementi, la quale ha $\frac{1}{2}$ per esponente, per cadaun termine della serie delle distanze, la quale ha pure per esponente $\frac{1}{2}$, l' esponente della serie de' prodotti sarà $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, o sia 1, e però la serie di questi prodotti sarà all' ultimo $PC \times \frac{1}{2}PC$, ovvero $\frac{1}{2}\overline{PC}^2$ moltiplicato pel numero de' termini PB, come 1 all' esponente 1 accresciuto dell' unità, o come 1 a 2, e conseguentemente questa somma di prodotti sarà la metà di $\frac{1}{2}\overline{PC}^2 \times PB$, cioè ella sarà $\frac{1}{4}\overline{PC}^2 \times PB$: ma la somma degli elementi è $\frac{2}{3}PC \times PB$; però dividendo $\frac{1}{4}\overline{PC}^2 \times PB$ per $\frac{2}{3}PC \times PB$, il quoziente $\frac{3}{8}PC$ sarà la distanza del centro di gravità della parabola, e quindi prendendo sopra PC una quantità PZ uguale a $\frac{3}{8}PC$, e sopra BP una quantità $BS = \frac{3}{5}BP$, poscia tirando per Z una retta ZH parallela a PB, e per S una retta SH parallela a PC, il punto H, ove queste due linee si segheranno, sarà 'l centro di gravità della parabola, per essere il medesimo distante da BN di $\frac{3}{5}BP$, e da BP di $\frac{3}{8}PC$.

Troveremo con simile ragionamento i centri di gravità di tutte le semiparabole di qualunque grado.

282. *Il centro di gravità d' un compimento* BCV (Fig. 111.) *di parabola quadra è un punto* X *lontano dall' asse* BP *d' una quantità uguale ai* $\frac{3}{4}$ *della tangente* BV *al vertice, e dalla medesima tangente* BV *distante d' una quantità uguale ai* $\frac{3}{10}$ *di* CV.

Tiro gli elementi MN, RS, ec. paralleli a BP; e questi essendo

sendo fra se come i quadri delle lor'assisse BM, BR, ec. han 2 per esponente; onde moltiplicando questi elementi per le loro distanze BM, BR all'asse BP della parabola, intorno a cui noi concepiremo che giri'l compimento, i prodotti formeranno una serie, il cui esponente sarà la somma 2 + 1, o sia 3 dell'esponente 2 della serie degli elementi, e dell' esponente 1 di quella delle distanze BM, BR, ec. che sono fra se come i numeri 0. 1. 2. 3, ec. così la somma de' prodotti sarà al maggiore BV × VC moltiplicato pel numero de'termini BV, come 1 a 3 + 1, o come 1 a 4, e però questa somma de' prodotti sarà $\frac{1}{4}\overline{BV}^2 \times VC$; dividendo adunque questa somma per quella degli elementi, la qual' è $\frac{1}{3}BV \times VC$, il quoziente $\frac{3}{4}BV$ ci fa vedere, che'l centro di gravità cercato è distante dall' asse BP d' una quantità uguale a $\frac{3}{4}BV$.

Ora, non potendo questo centro esser sopra BV, concepisco, che'l compimento gir'intorno a BV; e perchè la serie degli elementi, non meno che le distanze da' loro centri di gravità alla retta BV, le quali equivagliono alle metà di quest' elementi, han 2 per esponente, così la somma de' prodotti di ciascun' elemento per ogni distanza avrà per esponente 2 + 2, o sia 4; però questa somma sarà all'ultimo prodotto VC × $\frac{1}{2}$CV, ovvero $\frac{1}{2}\overline{VC}^2$ moltiplicato pel numero de' termini BV, come 1 a 4 + 1, o sia come 1 a 5, cioè ella sarà $\frac{1}{10}\overline{VC}^2 \times BV$, e dividendo questa per la somma $\frac{1}{3}VC \times BV$ degli elementi, il quoziente $\frac{3}{10}CV$ sarà la distanza dal centro di gravità del compimento alla retta BV. Quindi sopra BV pigliando la parte BF = $\frac{1}{4}$BV, e sopra VC la parte VZ = $\frac{3}{10}$VC, poi conducendo FX parallela ad VC, e ZX parallela a BC, il punto X sarà'l centro di gravità del compimento, e così degli altri compimenti di parabola.

283. Per trovare il centro di gravità d'un segmento BDC di parabola quadra (*Fig.* 112.), cerco'l centro X di gravità della parabola, e 'l centro di gravità O del triangolo PBC. Tiro la retta OX, ch' io prolungo di là d'X, poi dico per la Regola del Tre: come il segmento BDC è al triangolo PBC, così la distanza OX dal centro di gravità del triangolo al centro di gravità della parabola è ad un quarto termine; e facendo XZ uguale a questo quarto termine, il punto Z è'l centro di gravità del segmento.

Im-

Imperocchè altro non essendo la parabola che la somma del segmento e del triangolo, il centro di gravità X della parabola esser dee il centro d'equilibrio del segmento, e del triangolo. Ponendo dunque invece del triangolo e del segmento due pesi, i quali sieno nello stesso rapporto, tal che l'uno sia sul centro di gravità O del triangolo, e l'altro sul centro di gravità del segmento, converrà, acciò questi pesi sieno in equilibrio intorno al punto X, che 'l peso O, ovvero 'l triangolo sia all'altro peso, o al segmento, reciprocamente, come la distanza da questo secondo peso al centro d'equilibrio X è alla distanza dal peso O al medesimo centro X (*N.* 213.) : ma ciò è appunto quel, che da noi s'è dimostrato; onde il punto Z, che noi abbiamo con tal mezzo rinvenuto, è 'l centro di gravità del segmento.

284. Similmente, per trovare il centro di gravità d'una porzione PMNC di semiparabola quadra PBC (*Fig.* 113.) compresa fra due ordinate MN, PC all'asse BP, misuro le parabole PBC, ed MBN, e dalla maggiore sottraendo la minore, il residuo è 'l valor della porzione PMNC. Cerco 'l centro di gravità X della parabola PBC, e 'l centro di gravità O della parabola MBN; tiro la retta OX, ch'io prolungo di là d' X, e per la Regola del Tre io dico: siccome la porzione PMNC è alla picciola parabola MBN, così la distanza OX dal centro di gravità O della picciola parabola al centro X della grande è ad un quarto termine, che sarà la distanza XZ dal centro di gravità della porzione PMNC al centro X della massima parabola, e in conseguenza il punto Z sarà 'l centro di gravità di detta porzione; poichè altro non essendo la parabola PBC se non se la somma della picciola parabola BMN, e della porzione PMNC, conviene, che queste due parti sieno in equilibrio intorno al centro X, e per conseguente che le distanze da' loro centri di gravità O, Z lor sien reciproche.

285. *Il centro di gravità d'un' arco di circolo* ABC (*Fig.* 114.) *è sopra la retta* OB, *che parte dal centro* O *del circolo, e sega per mezzo in* B *l'arco* ABC; *e la distanza* XO *da questo centro di gravità al centro* O *del circolo è una quarta proporzionale all'arco* ABC, *alla sua corda* AC, *e al raggio* OB *del circolo.*

La prima parte di questa proposizione è per se evidente; poichè essendo l'arco ABC diviso per mezzo dalla retta OB, che passa pel centro del circolo, ed essendo tutt'i punti del semiarco

AB tanto lontani da questa retta, quanto tutti gli altri dell'altro semiarco BC, è manifesto, che questi due semiarchi esser debbono in equilibrio intorno a BO.

Per provare poscia la seconda, supponiamo prima, che l' arco ABC sia minor della semicirconferenza. Dal punto B tiro la tangente PBT, ch' io faccio uguale al diametro MN parallelo ad AC, facendo PB e BT uguali ciascuna al raggio; e supponendo, che la semicirconferenza MBN e la tangente PT girino intorno al diametro MN, la semicirconferenza MBN descriverà la superficie d' una sfera ; la tangente PT quella del cilindro circonscritto alla sfera , e l' arco ABC la superficie d' una zona , uguale alla superficie cilindrica , che verrà descritta dalla retta VE uguale alla larghezza AC della zona ; così questa superficie sarà uguale ad VE , od AC moltiplicata per la circonferenza del raggio OB : ma la superficie descritta dall' arco ABC è altresì uguale all' arco ABC moltiplicato per la circonferenza descritta dalla distanza OX dal suo centro di gravità all'asse di moto MN ; onde noi avremo AC × (OB = ABC × (OX ; dal che io deduco ABC . AC : : (OB . (OX , e in vece delle circonferenze ponendo i raggi , avremo ABC . AC : : OB. OX ; e però OX è quarta proporzionale all'arco ABC, alla sua corda AC, e al raggio OB.

Ora, per trovare il centro di gravità dell'altro arco ARC , considero, che 'l centro di gravità della circonferenza essendo 'l centro O di detta circonferenza (poichè tutt'i suoi punti, essendo equidistanti da questo centro , rispetto ad esso centro pesano egualmente) , i due archi ABC, ARC componenti la circonferenza debbono essere in equilibrio intorno al loro centro di gravità comune O ; quindi prolungo XO di là d' X , e per la Regola del Tre io dico: l'arco ARC è all' arco ABC , reciprocamente, come la distanza XO dal centro di gravità dell' arco ABC è ad un quarto termine , ch' esser dee la distanza OZ dal centro di gravità del arco ARC ; onde noi avremo ABC × OX = ARC × OZ, ovvero in vece di OX ed OZ ponendo le lor circonferenze , avremo ABC × (OX = ARC × (OZ: ma ABC × (OX = AC × (OB ; dunque ARC × (OZ = AC × (OB, e però ARC . AC : : (OB . (OZ, ovvero rimettendo i raggi in vece delle circonferenze, ARC. AC : : OB. OZ ; il che fa vedere, la distanza OZ dal centro di gravità Z dell' arco ARC al

centro

centro del circolo esser pure quarta proporzionale all'arco ARC, alla sua corda AC, e al raggio del circolo.

286. Quindi ne segue, che se l'arco ABC è uguale alla semicirconferenza, la distanza dal suo centro di gravità al diametro, o pure al centro del circolo è quarta proporzionale alla semicirconferenza, al diametro, e al raggio.

287. *Il centro di gravità* X *d' un settor di circolo* ABC (Fig. 115.) *è sopra la retta* BR *tirata dal centro* B, *e segante per mezzo in* R *l' arco* AC *del settore; e la distanza da detto centro* X *al centro* B *del circolo è una quarta proporzionale all' arco* AC, *alla sua corda* AC, *e ai due terzi del raggio* AB *del circolo.*

Dividendo la retta BR in due parti eguali il settore, è manifesto, che queste due parti esser debbono in equilibrio intorno a BR, e conseguentemente ch'l centro di gravità comune a queste due parti esser dee sopra BR.

Ora, per trovare la distanza da X al centro B del circolo, supponiamo prima, che 'l settore sia minor d' un semicircolo, e che 'l medesimo giri intorno al diametro MN perpendicolare sopra BR. Essendo 'l circolo un poligono d'infiniti lati, egli è composto d' un' infinità di triangoli uguali, i cui vertici sono al centro, e le cui basi sono i piccioli lati uguali del poligono: così 'l settore ABC è composto d' un numero di triangoli, il quale è al numero contenuto dal circolo come l' arco ARC all' intera circonferenza; e perchè le basi de' triangoli sono infinitamente picciole, le perpendicolari tirate dal centro sopra i mezzi delle lor basi non differiscono da' lati di essi triangoli, cioè dal raggio AB. Però tutt'i centri di gravità de' triangoli componenti 'l settore, essendo lontani da' loro vertici d' una quantità uguale ai due terzi delle linee tirate da' vertici su i mezzi delle basi (*N.* 273.), sono anche distanti dal centro B d' una quantità uguale ai due terzi del raggio AB; quindi pigliando sopra AB la parte TB uguale ai $\frac{2}{3}$ di AB, e dal centro B coll'intervallo BT descrivendo l' arco TV, ei passerà per tutt' i centri di gravità de' triangoli componenti 'l settore. Onde concependo questi triangoli come tanti pesi uguali, i quali sarebbero sull' arco TV attaccati a' centri di gravità, ci resta solo a trovare il loro centro di gravità comune, il quale altro non è che 'l centro di gravità di detto arco, perocchè tutt' i pesi sono fra se come gli elementi dello stesso arco. Ora, per trovare il centro di gravità dell' arco, conviene

X 2

viene far quest'analogia: l'arco TV è alla sua corda TV, come il raggio TB alla distanza BX (*N.* 285.), e a cagione de' settori simili ABC, TBV, l'arco ARC è alla sua corda AC, come l'arco TV alla sua corda TV. Dunque l'arco ARC è alla sua corda AC, come TB, il qual'è i due terzi del raggio AB, alla distanza BX.

Se 'l settore AHC è più grande del semicircolo, terminando la circonferenza del raggio BT troveremo, che i centri di gravità di tutt'i triangoli componenti 'l settore AHC sono sopra l' arco TPV. Ora, per avere il centro di gravità di quest' arco, debbo altresì fare TPV. TV : : TB. BZ, e i settori simili AHC, TPV ci danno TPV. TV : : AHC. AC; onde AHC. AC : : TB, ovvero $\frac{2}{3}$AB. BZ, e 'l punto Z è 'l centro di gravità del settore AHC.

288. Dalle cose finora dette noi possiamo dedurre il metodo di trovar'il centro di gravità d'una pietra arcata d'una volta circolare. Già si sa, che le pietre arcate d'una volta circolare ABHLCD (*Fig.* 116.) son segate in modo, che tutte le lor giunture AD, BC, ec. essendo prolungate vanno a terminare al centro P, ed in conseguenza altro non è qualunque pietra arcata ABCD che un settore ABP meno un settor simile DCP. Per avere dunque il centro di gravità di questa pietra arcata, converrà cercare il centro di gravità X del settore ABP, e 'l centro di gravità Z del settor DCP, poscia si misurerà il settore ABP e 'l settor DCP, e dal più grande togliendo il più picciolo, s'avrà 'l valore della superficie ABCD della pietra arcata; dopo di ciò per la Regola del Tre si dirà: la superficie ABCD è al settore DCP, reciprocamente, come la distanza XZ dal centro di gravità del settor DCP al centro di gravità X del settore ABP è ad un quarto termine, che sarà la distanza dal centro di gravità della superficie ABCD al centro di gravità X del settore APB. Così prolungando XZ, e facendo XV uguale alla distanza trovata, il punto V sarà 'l centro di gravità della superficie ABCD, perchè la superficie ABCD e 'l settore DCP, componendo insieme il settore ABP, esser debbono in equilibrio intorno al centro X di gravità dello stesso settore; perciò il loro centro di gravità particolare esser dee in distanze da X reciproche alle lor grandezze.

Qualunque pietra arcata avendo della densità, è manifesto, che dopo trovato il centro di gravità V della sua superficie, quello della pietra arcata sarà sul mezzo della densità, cioè sul mezzo della

della perpendicolare, che passerebbe dal punto V sopra la super. ficie opposta.

289. Per trovare il centro di gravità d'un segmento ABC di circolo (*Fig.* 117.), misuro'l settore ABCP, e 'l triangolo APC; e dal valor del settore togliendo quello del triangolo, il residuo è'l valor del segmento ABC. Cerco'l centro di gravità X del settore ABCP, e'l centro di gravità O del triangolo APC; poi tirando la linea OX, ch'io prolungo di là d'X, dico per la Regola del Tre: come il segmento ABC è al triangolo APC, reciprocamente la distanza OX dal centro di gravità O del triangolo al centro di gravità X del settore è ad un quarto termine, ch'esser dee la distanza XZ dal centro di gravità Z del segmento al centro del settore; perocchè il segmento e'l triangolo, componendo'l settore, esser debbono in equilibrio intorno al centro di gravità del settore, e ciò non puossi ottenere, quando le distanze da'loro centri di gravità Z, O al centro X non sieno reciproche alle lor grandezze.

290. Per trovare il centro di gravità d'una porzione di circolo ACNM (*Fig.* 118.) compresa fra due segmenti ABC, MHN, cerco'l centro di gravità X del quadrilatero ACNM, il centro di gravità O del segmento MA, e'l centro di gravità Z del segmento CN; poi considerando le tre figure come tanti pesi posti a'loro centri di gravità X, O, Z, tiro la retta OX, e sopra d'essa io cerco'l centro d'equilibrio T de'pesi X, O, cioè del quadrilatero ACNM, e del segmento MA. Conduco la retta TZ, e concependo, che i due pesi X, O sien posti sul loro centro d'equilibrio T, cerco'l centro d'equilibrio V de'due pesi X, O posti in T, e del peso Z, e trovo, che'l punto V è'l centro d'equilibrio dei tre pesi X, O, Z, ovvero delle tre figure ACNM, MA, e CN; e conseguentemente egli è pure il centro di gravità della figura ACNM composta delle tre.

291. *Il centro di gravità d'un'elisse* ABCD (*Fig.* 119.) *è lo stesso che'l centro* O *della figura.*

Tiro i due assi AC, DB: tutti gli elementi paralleli all'asse minore DB son segati per mezzo dall'asse maggiore AC; onde i loro centri di gravità sono sopra quest'asse maggiore, e per conseguente il loro centro di gravità comune è sopra detto asse. Conduco l'asse minore DB, il quale sega'l maggiore AC in due parti eguali, e siccome tutti gli elementi paralleli all'asse minore pesano sopra'l maggiore, come se fossero posti ciascuno sul suo

centro

centro di gravità, ch' è sopra l'asse maggiore, e perchè non vi sono più elementi, che traversino il semiasse maggiore AO, di quelli ve ne sieno, che traversino l'altro semiasse maggiore CO, e perchè le distanze da questi elementi al centro O dall' una e dall' altra parte son' eguali ciascuna a ciascuna, così ne segue, che tutti gli elementi, i cui centri di gravità son sopra AO, tanto pesano sopra AO, quanto quelli, i cui centri di gravità son sopra CO, pesan sopra CO, e conseguentemente il punto O dee essere il loro centro di gravità comune, ovvero 'l centro di gravità dell' elisse.

292. *Il centro di gravità d' un segmento elittico* ABCP (Fig. 120.), *la cui corda* AC *è ordinata al grand' asse, è 'l medesimo che 'l centro di gravità del segmento del circolo circonscritto all' elisse, la cui corda* EH *è la stessa della corda* AC *prolungata d' ambe le parti fino alla circonferenza del circolo.*

La linea PB divide per mezzo il segmento circolare EBHP, e 'l elittico ABCP, ed in conseguenza il centro di gravità dell' uno e dell' altro segmento esser dee sopra questa retta. Ora, parlando dell' elisse, s' è dimostrato, che gli elementi del segmento elittico APCB perpendicolari a PB sono proporzionali agli elementi del segmento circolare EBHP, ed egli è manifesto, che le distanze dagli elementi del segmento elittico al centro P dell' elisse son' uguali ciascuna a ciascuna alle distanze degli elementi del segmento circolare al medesimo punto P, ch' è pure il centro del circolo. Posto dunque, che qualunque elemento del segmento elittico non sia che la metà di ciascun' elemento del circolare, e concependo, ch' amendue girino intorno all' asse minore MN perpendicolare a PB, la somma dei prodotti degli elementi del segmento circolare per le loro distanze all' asse di moto MN sarà doppia della somma dei prodotti degli elementi del segmento elittico per le medesime distanze. Chiamisi $2x$ la somma dei prodotti degli elementi del segmento circolare per la loro distanza, e s' avrà x per la somma dei prodotti degli elementi del segmento elittico per le loro distanze così pure chiamando $2y$, quella degli elementi del segmento circolare, s' avrà y per quella degli elementi del segmento elittico. Ora, per avere la distanza dal centro di gravità del segmento circolare all' asse di moto MN, convien dividere la somma $2x$ dei momenti de' suoi elementi per la somma $2y$ degli elementi; onde questa distanza sarà $\frac{2x}{2y}$, ovvero $\frac{x}{y}$: così an-

ancora, a fin d'avere la diſtanza dal centro di gravità del ſegmento elittico all'aſſe di moto MN, fa di meſtiere divider la ſomma x dei momenti de' ſuoi elementi per la ſomma y degli elementi; e però queſta diſtanza ſarà ancora $\frac{x}{y}$: ma ella è la ſteſſa di quella trovata pel ſegmento circolare; dunque il centro di gravità X d' amendue i ſegmenti eſſer dee il medeſimo.

293. Proveremo nello ſteſſo modo, che'l centro di gravità d' un ſegmento elittico ABC (*Fig.* 121.), la cui corda AC è perpendicolare all'aſſe minore, è'l medeſimo che'l centro di gravità del ſegmento corriſpondente EBH del circolo iſcritto; che'l centro di gravità d'una faſcia elittica AMNC compreſa fra due doppie ordinate AC, MN è lo ſteſſo che'l centro di gravità della faſcia corriſpondente EHTV del circolo corriſpondente, ec.

294. *Il centro di gravità* X *d'un ſettor'elittico* ABCD (Fig. 120.), *la cui corda* AC *è perpendicolare all'aſſe maggiore* BZ, *è lo ſteſſo che'l centro di gravità del ſettor corriſpondente* EBHP *del circole circonſcritto* BHZE.

Tutti gli elementi del ſettor'elittico ſon proporzionali a quelli del circolare, come s' è dimoſtrato nelle Sezioni Coniche; e le diſtanze dai centri di gravità degli elementi del ſettor' elittico al centro P dell' eliſſe ſon' uguali ciaſcuna a ciaſcuna a quelle de' centri di gravità degli elementi del ſettor circolare al medeſimo centro P. Poſto dunque, che ciaſcun'elemento del ſettor circolare ſia doppio di ciaſcun'elemento dell'elittico, il prodotto degli elementi del ſettor circolare per le loro diſtanze ſarà doppio del prodotto degli elementi del ſettor'elittico: così chiamando $2x$ il primo prodotto, x ſarà'l ſecondo, chiamando $2y$ la ſomma degli elementi del ſettor circolare, avremo y per quella degli elementi del ſettor' elittico, e però la diſtanza dal centro di gravità del ſettor circolare al centro P dell' eliſſe ſarà $\frac{2x}{2y} = \frac{x}{y}$, e la diſtanza dal centro di gravità del ſettor' elittico al medeſimo centro P ſarà $\frac{x}{y}$: ma queſte due diſtanze ſon le medeſime; onde il punto X è'l centro di gravità di amendue i ſettori.

Con ſimile ragionamento proveremo, che'l centro di gravità del ſettor'elittico ABCP (*Fig.* 121.), la cui corda è perpendico-

dicolare all'asse minore, è lo stesso che quello del segmento corrispondente EBHP del circolo iscritto.

295. Per trovare il centro di gravità d' un segmento elittico ABC (*Fig.* 122.), la cui corda AC sia obbliqua all'asse maggiore ed al minore, divido per mezzo in S la sua corda AC, e da S pel centro P dell'elisse tiro la retta PB, che sarà il semidiametro del segmento. Divido il semiasse maggiore RP in H nella stessa ragione che 'l semidiametro BP lo è in S, cioè faccio BP. BS : : RP. RH; da H conduco la retta MN perpendicolare al grand'asse, il che mi dà un segmento elittico MRN, di cui cerco 'l centro di gravità X colle sopr' accennate Regole; divido BS in Z nella medesima ragione che RH lo è in X, cioè faccio RH. RX : : BS. BZ, e 'l punto Z è 'l centro di gravità del segmento ABC: il che io provo nel seguente modo.

Nelle Sezioni Coniche parlando dell'elisse ho dimostrato, che 'l segmento ABC è uguale al segmento MRN; che le lor basi son reciproche all'altezze, cioè, che dal punto B tirando la perpendicolare BT alla base AC si ha AC. MN : : RH. BT; che se RH si concepisce segato in infinite parti eguali, e BS in uno stesso numero di parti, e che dopo aver da' punti di divisione condotto delle parallele alle basi MN, AC, sopra dette parallele si circonscrivano de' piccioli rettangoli rispetto al segmento MRN, e de' piccioli parallelogrammi rispetto al segmento ABC, come vedesi nella figura, sicchè tanti rettangoli vi sieno dall' una quanti parallelogrammi vi sono dall' altra parte, ogni rettangolo del segmento MRN sarà uguale ad ogni parallelogrammo del segmento ABC. Ciò posto.

Si concepisca, che 'l segmento MRN gir' intorno alla sua base MN, e 'l segmento ABC intorno alla sua AC. I centri di gravità de' rettangoli del segmento MRN saran sopra i mezzi delle particelle della retta RH, che traversano questi rettangoli, e li segan per mezzo, ed i centri di gravità de' parallelogrammi del segmento ABC saran pure sopra i mezzi delle particelle della retta BS che li traversano, e li segan parimente per mezzo. Si concepisca dunque, che tutt'i rettangoli e parallelogrammi sieno tanti pesi posti su i loro centri di gravità; e quanto a' pesi, che rappresentano i parallelogrammi, facciamoli avanzar paralleli alla base AC, finchè seghino la perpendicolare BT in que' punti, dove noi li concepiremo attaccati.

Essendo le rette RH, BS divise in uno stesso numero di parti eguali,

eguali, è manifesto, che le parti di RH comprese ne' rettangoli del segmento MRN son proporzionali alle parti di BS comprese ne' parallelogrammi del segmento ABC; e siccome i centri di gravità de' rettangoli del segmento MRN segan per mezzo le parti di RH comprese ne' rettangoli, appunto come i centri di gravità de' parallelogrammi del segmento ABC segano per mezzo le parti di BS comprese ne' parallelogrammi, egli è altresì manifesto, che la linea RH è divisa ne' punti O, O, ec. da' centri di gravità de' rettangoli, nella medesima ragione che la linea BS lo è ne' punti L, L, ec. da' centri di gravità de' parallelogrammi: ma a cagione delle parallele LI, LI, ec. la perpendicolare BT è divisa ne' punti I, I, ec. nella stessa ragione, che la retta BS lo è ne' punti L, L, ec. onde la perpendicolare BT è divisa ne' punti I, I, ec. nella medesima ragione, che la retta RH lo è nei punti O, O, ec. cioè le distanze IT, IT, ec. da' centri di gravità de' parallelogrammi del segmento ABC alla base AC di detto segmento sono fra se come le distanze OH, OH, ec. da' centri di gravità de' rettangoli del segmento MRN alla base MN dello stesso segmento; e però se supponiamo, p. e. RH doppia di BT, tutti gli OH saran doppj di tutti gl' IT. Quindi moltiplicando tutt' i rettangoli del segmento MRN per le loro distanze OH, ec. la somma de' prodotti sarà 'l doppio della somma dei prodotti de' parallelogrammi del segmento ABC per le loro distanze IT, ec. a motivo dell' egualità de' rettangoli, e parallelogrammi: così chiamando $2x$ la prima di queste somme de' prodotti, la seconda sarà x, ed in conseguenza, se chiamasi y la somma de' rettangoli, quella de' parallelogrammi sarà parimente y; dividendo adunque $2x$ ed x per y, i quozienti saranno $\frac{2x}{y}$, ed $\frac{x}{y}$, e questi faran vedere, che la distanza dal centro di gravità del segmento MRN alla sua base è 'l doppio del centro di gravità del segmento ABC alla sua base AC, e che pigliando $TQ = \frac{1}{2}HX$, il punto Q sarà la distanza dal centro di gravità del segmento ABC alla sua base AC. Ora 'l centro di gravità del segmento ABC esser dee sopra BS; onde da Q tirando QZ parallela ad AC, il punto Z sarà 'l centro di gravità cercato, e BS sarà in Z diviso nella stessa ragione, che BR lo è in X.

296. Nelle Sezioni Coniche ho pure dimostrato, che 'l settor' ABCP equivale al settore MRNP, supponendo sempre BP . BS : : RP . RH; e per conseguente, se in amendue i settori si circonscrivessero de' rettangoli e parallelogrammi, come s'è fatto ris-

petto ai segmenti, ogni rettangolo sarebbe uguale ad ogni parallelogrammo; e se si facesse girare il settor'MRNP intorno all'asse minore, ch'è parallelo alla sua base, e'l settore ABCP intorno al diametro conjugato, ch'è altresì parallelo alla sua base AC, troverebbesi, posto che la distanza dal centro O di gravità del settor'MRNP al centro P sia la retta OB, che per avere il centro di gravità L dell'altro settore converrebbe far' RP. RO : : BP. BL.

297. Io quì non parlo del centro di gravità dell'iperbola, perchè non essendosi finor trovato la quadratura della stessa, egli ci è ancora ignoto; nè mi occupo da vantaggio in cercare i centri di gravità d'un maggior numero di figure, attesoch'egli sarà facile ritrovarli coll'applicazione de'precedenti principj. Or mi resta a dimostrare, come si trovino i centri di gravità de'solidi.

298. *Se in qualunque Prisma, parallelepipedo e cilindro sul centro di gravità* X *della base* (Fig. 123.) *s'alza una perpendicolare* XZ *fino alla base superiore, il centro di gravità del solido sarà sul mezzo* P *di essa perpendicolare*.

Ciò è manifesto, poichè se si concepisce, che'l prisma sia segato da infiniti piani paralleli alla sua base, i quali tutti saranno a detta base simili ed uguali, la perpendicolare XZ passerà per tutt' i centri di gravità di essi piani, ed in consequenza il loro centro d'equilibrio comune sarà parimente sopra XZ; e siccome tutt'i piani son'uguali, e che tanti ve ne sono fra P e Z, come fra P ed X, così'l punto P sarà'l centro cercato.

299. *Nelle figure simili, i centri di gravità son posti similmente*.

Sieno le due figure simili ABCDE, *abcde* (*Fig.*124.): divido ciascuna di esse in triangoli con linee tirate dagli angoli uguali A, *a*; così io ho tanti triangoli nell'una che nell'altra, e ciascun triangolo dell'una è simile a cadauno dell'altra. Ne' triangoli simili BAC, *bac* da'vertici A, *a* io tiro le rette AH, *ab* su i mezzi delle lor basi BC, *bc*, e queste linee son similmente poste in detti triangoli, tal che io ho AH. *ab* : : BC. *bc* : ma i centri di gravità de'due triangoli sono sopra i due terzi AR, *ar* delle rette AH, *ab*; onde AR. *ar* : : AH. *ab*, ed in conseguenza i due centri di gravità R, *r* sono in detti triangoli similmente posti. Per la stessa ragione, i centri di gravità T, *t* de'triangoli simili CAD, *tad* sono similmente posti in essi triangoli, ed abbiamo AT. *at* : : CS. *cs* : : BC. *bc* : : AR. *ar*; e siccome l'angolo HAC equi-

equivale all' angolo *bac*, e CAS all' angolo *cas*, HAS è altresì uguale all' angolo *bas*, e però i triangoli RAT, *rat* son simili, perchè hanno i lati AR, AT proporzionali a' lati *ar*, *at*, e l' angolo compreso RAT uguale all' angolo compreso *rat*.

Ora, per trovare il centro di gravità X comune ai due triangoli BAC, CAD, convien dividere RT in due parti RX, XT reciproche a questi due triangoli, e per trovare il centro di gravità comune de' triangoli *bac*, *cad* simili ai due BAC, CAD, conviene altresì dividere *rt* in due parti reciproche ai due triangoli; onde RX. XT : : *rx*. *xt*, e però RX. RX × XT : : *rx*. *rx* × *xt*, ovvero RX. RT : : *rx*. *rt*, od RX. *rx* : : RT. *rt* : ma RT. *rt* : : RA. *ra*; dunque RX. *rx* : : RA. *ra*, ed in conseguenza tirando le rette AX, *ax*, i triangoli RAX, *rax* son simili, e similmente posti nelle due figure; e perchè l'angolo RAC è uguale all'angolo *rac*, l'angolo CAX è altresì uguale all' angolo *cax*.

Il centro di gravità O del triangolo AED, e 'l centro di gravità *o* del triangolo AED sono pure similmente posti in questi triangoli; perciò l' angolo OAD è uguale all' angolo *oad*: ma CAD equivale all'angolo *cad*, e l'angolo CAX all' angolo *cax*; onde XAD è uguale ad *xad*, e l'angolo XAO all' angolo *xao*; quindi tirando le rette XO, *xo*, i triangoli XAO, *xao* saran simili, a motivo di AX. *ax* : : AR. *ar* : : BC.*bc*, e di AO. *ao* : : ED. *ed* : : BC. *bc* : così le rette XO, *xo* saranno similmente poste nelle due figure.

Ma per avere il centro di gravità della figura ABCDE, dividasi XO in due parti XZ, ZO reciproche al triangolo AED, e alla somma dei due ABC, ACD; e per avere il centro di gravità della figura *abcde*, dividasi la retta *xo* in due parti *xz*, *xo* reciproche al triangolo *aed* simile al triangolo AED, e alla somma dei due *abc*, *acd* simili ai due ABC, ACD; onde XZ. ZO : : *xz*. *zo* : così XZ. XZ + ZO, od XO : : *xz*. *xz* + *zo*, od *xo*, ovvero XZ. *xz* : : XO. *xo*. Ma XO. *xo* : : AO. *ao* : : ED. *ed* : : BC. *bc*; dunque XZ. *xz* : ED. *ed* : : BC. *bc*, ed in conseguenza i centri di gravità Z, *z* sono similmente posti nelle due figure, e così degli altri.

300. *Il centro di gravità di qualunque piramide e cono è sopra la retta tirata dal centro della base alla cima; e la distanza*

da questo centro alla cima è i tre quarti della linea condotta al vertice.

Tutt'i piani MNHR (*Fig.* 125.) , componenti una piramide, e paralleli alla sua base BCDH , son simili fra loro e alla base; onde dal centro di gravità X della base tirando la retta XA , ella dee passare per i centri di gravità di tutt' i piani MNHR, ec. poichè i triangoli simili ACD, ANH ci danno CD. NH : : AC. AN; e nella base BCDE , e nel piano MNHR tirando le rette CX , NV , i triangoli simili ACX , ANV ci danno AC. AN :: CX. NV. Dunque CD. NH::CX. NV ; e però , a motivo degli angoli uguali VNH , XCD , le rette CX, NV proporzionali a' lati omologhi CD , NH de'due piani sono in essi due piani similmente poste; e siccome 'l centro di gravità X della base BCDE è collocato all' estremità X, di necessità conviene, che 'l centro di gravità V del piano MNHR sia posto sull'estremità V della retta NV ; altrimenti questi due centri di gravità non sarebbero similmente posti ne' loro piani : ma i punti X , V appartengono alla retta XA ; dunque tutt' i centri di gravità de'piani componenti la piramide sono sopra la retta XA tirata dal centro di gravità dalla base al vertice, e per conseguente il loro centro di gravità esser dee sopra XA.

Ora, se la retta XA è perpendicolare alla base , le distanze VA, ec. da'centri di gravità de' piani al vertice A saranno uguali all'altezze de'piani, cioè alle distanze de'piani al vertice . Ma i piani , essendo fra se come i quadrati delle loro altezze , formano una serie, il cui esponente è 2; e le distanze da' loro centri di gravità al vertice A ne formano un'altra, il cui esponente è 1 ; dunque la somma dei prodotti de'piani per le distanze da'loro centri di gravità, o per le loro altezze formerà una serie, il cui esponente sarà 2 + 1 , o sia 3; e però detta serie sarà al suo ultimo termine moltiplicato pel numero de' termini come 1 a 3 + 1 , ovvero come 1 a 4. Così chiamando *aa* la base BCDE, e *b* l'altezza AX, la somma de' prodotti sarà $\frac{1}{4}aabb$: ma la somma de'piani si è $\frac{1}{3}aab$; onde dividendo $\frac{1}{4}aab \times \frac{1}{3}aab$, il quoziente $\frac{1}{4}b$ sarà la distanza dal centro di gravità della piramide al vertice A.

Se la retta XA (*Fig.* 126.) non è perpendicolare alla base, dal vertice A io abbasso la perpendicolare AP; quindi sopra detta perpendicolare io trasporto tutt' i centri di gravità con linee parallele alla retta XP, ch'è nel piano della base , e considerando tutt'i piani come tanti pesi attaccati a tutt'i punti della leva

AP,

AP, troverò come sopra, la somma de' prodotti di ciascun peso per la sua distanza esser $\frac{1}{4}aabb$, e quella de' pesi $\frac{1}{3}aab$; onde dividendo la prima per la seconda somma, avremo $\frac{3}{4}b$ per la distanza AQ. Però trasportando il punto Q sopra la retta AX con una linea QR parallela ad XP, il punto R sarà 'l centro di gravità di tutt'i piani, o della piramide, ed avremo AR $=\frac{3}{4}$AX; imperocchè, a motivo de' triangoli simili AXP, ARQ, noi abbiamo AP. AQ : : AX. AR: ma AQ $=\frac{3}{4}$AP; dunque AR $=\frac{3}{4}$AX.

301. Siccome tutt'i solidi a più facce possono dividersi in più piramidi nella stessa guisa, che tutt'i piani posson dividersi in triangoli, così troveremo 'l centro di gravità d'un corpo irregolare, cercando prima i centri di gravità di tutte le piramidi, che 'l compongono, e quindi quello a tutte le piramidi comune.

302. *Il centro di gravità* H *della superficie d'un segmento* ABC *di sfera* (Fig. 127.) *è sul mezzo della linea* BR *alzata perpendicolarmente sul centro* R *della sua base* AC.

La superficie del segmento ABC è uguale alla superficie FMNE della parte FMNE del cilindro circonscritto; e questa parte ha per altezza la retta FM uguale all'altezza RB del segmento. Ora, se con un piano TV parallelo alla base segasi per mezzo la parte cilindrica FMNE, la superficie cilindrica TMNV equivarrà alla superficie TFEV; ed in conseguenza queste due superficie saranno in equilibrio intorno al piano secante TV, e 'l loro centro di gravità comune sarà sopra detto piano, cioè in H, ch'è il centro di questo piano: ma la superficie XBZ, che 'l piano TV taglia sul segmento, equivale alla superficie TMNV, e l'altra AXZV alla superficie ETVF; dunque le due superficie XBZ, AXZC, essendo fra se uguali, sono in equilibrio intorno al piano, e 'l loro centro di gravità comune è sopra detto piano, cioè in H.

Così ancora noi proveremo, che 'l centro di gravità d'una zona sferica AXZC è sul mezzo della retta RH tirata dal centro O del circolo AC, che serve di base inferior' al centro H del circolo XZ, che n'è la superiore.

303. *Il centro di gravità* X *d'un settore* ABCD *di sfera* (Fig. 128.) *è sopra la retta* BP *tirata dal centro* D *della sfera pel centro* P *del circolo, il quale serve di base al segmento* ABC; *e la distanza* DX *da questo centro di gravità al centro* D *della sfera è uguale ai* $\frac{3}{4}$ *del raggio* BD *meno i* $\frac{1}{2}$ *della retta* PB *compresa*

presa fra la superficie della sfera, e 'l circolo, che serve di base al segmento.

Altro non è il settore sferico ABCD che un'infinità di piramidi, le quali tutte hanno i loro vertici al centro D della sfera, e le lor basi sulla superficie della sfera medesima: così tutte queste piramidi, le cui basi sono infinitamente picciole, hanno per altezza il raggio AD, o pur BD, e i loro centri di gravità son distanti dal vertice comune A d'una quantità uguale a $\frac{3}{4}$AD, ovvero $\frac{3}{4}$BD; però se concepisco un' altra sfera, il cui centro sia 'l medesimo punto D, e 'l raggio DH sia uguale a $\frac{3}{4}$AD, la superficie del settore HRLD simile al settore ABCD passerà per tutt' i centri di gravità delle piramidi; e siccome tutte le piramidi sono in equilibrio intorno alla retta DB, nello stesso modo che tutte le parti della superficie HRL lo sono intorno alla stessa retta, egli è manifesto, che se si concepiscono le piramidi attaccate al loro centro di gravità sulla superficie HRL, il lor centro di gravità comune sarà 'l centro di gravità della superficie HRL; e per conseguente questo centro sarà sul mezzo X della retta RV.

Ora, a motivo de' settori simili ABCD, HRLD, noi abbiamo AD. HD : : AC. HL : : BP. RV; onde, a cagione di HD $= \frac{3}{4}$AD, si ha RV $= \frac{3}{4}$BP, ed in conseguenza RX $= \frac{1}{2}$RV $= \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$BP $= \frac{3}{8}$BP: ma XD $=$ RD $-$ RX, ed RD $= \frac{3}{4}$BD; dunque XD $= \frac{3}{4}$BD $- \frac{3}{8}$BP.

Per trovare il centro di gravità dell' altro settore AMCD, misuro l' intera sfera e 'l settore ABCD, e dall' intera sfera togliendo questo settore, il residuo è 'l valor del settore AMCD; perciò prolungando la retta XD di là da P in Z, per la Regola del Tre io dico: siccome 'l settore AMCD è al settor' ABCD, reciprocamente la distanza XD dal centro di gravità X del settor' ABCD al centro D della sfera è ad un quarto termine, che sarà la distanza DZ dal centro di gravità Z del settor' AMCD allo stesso centro D; perocchè i due settori, che compongon la sfera, esser debbono in equilibrio intorno al centro D, ch'è il loro centro di gravità comune.

304. Per trovare il centro di gravità d' un segmento ABC (*Fig.129.*) misuro 'l settore ABCD, e 'l cono ACD, poscia dal settore togliendo 'l cono, il residuo è 'l valore del segmento; cerco 'l centro di gravità X del settore, e quello di gravità Z del cono, poi prolungando ZX verso B, per la Regola del Tre io dico:

dico: il segmento ABC è al cono ACD, reciprocamente, come la distanza ZX dal centro di gravità del cono al centro di gravità X del settore è ad un quarto termine, che sarà la distanza XV dal centro di gravità V del segmento al medesimo centro X del settore, dovendo il segmento e'l cono esser' in equilibrio intorno al centro X del settore, ch' essi compongono.

305. Per trovare il centro di gravità d'una zona sferica ABCD (*Fig.* 130.), la cui base AD sia un circolo uguale al massimo della sfera, levo da questa zona il cono BCP d' eguale altezza, e la cui base BC equivale alla superior della zona, e 'l residuo sarà una spezie d' imbuto ABPCD, il qual' è composto d' infinite piramidi uguali aventi 'l vertice al centro P della sfera, e le basi sulla superficie della zona: così queste piramidi han tutte l'altezze uguali fra se e al raggio BP, od AP, ed in conseguenza i lor centri di gravità sono tutti distanti dal loro comun vertice P d' una quantità uguale a $\frac{3}{4}$AP, ovvero $\frac{3}{4}$BP. Però s'io concepisco una sfera, il cui centro sia'l punto P, e'l cui raggio sia PH $=$ $\frac{3}{4}$AP, l'imbuto HRPZV di questa sfera sarà simile all'imbuto ABPCD, e la superficie dell' imbuto HRPZV passerà per tutt' i centri di gravità delle piramidi componenti l'imbuto ABPCD; onde concependo tutte queste piramidi come tanti pesi attaccati al loro centro di gravità sulla superficie HRZV, il lor centro di gravità comune sarà lo stesso che'l centro di gravità della superficie HRZN: ma il centro di gravità di questa superficie è sul mezzo O della sua altezza TP; dunque il punto O sarà 'l centro di gravità dell'imbuto ABPCD.

Cerco 'l centro di gravità L del cono BPC; poi divido la retta LO in due parti LX, XO, che sieno fra loro reciprocamente come l'imbuto ABPCD al cono BPC, ed X sarà'l centro di gravità della zona ABCD; poichè essendo questa zona composta dell' imbuto ABPCD, e del cono BPC, le distanze da' centri di gravità di esse due parti al lor centro di gravità comune V debbono esser loro reciproche.

Ma se la base inferior BC d'una zona BMNC non è il massimo circolo della sfera, cerco 'l centro di gravità L della zona AMND, che ha il massimo circolo della sfera per base, e'l centro di gravità X della zona ABCD, che ha pure per base il massimo circolo della sfera; misuro le zone AMND ed ABCD, e dalla maggior levando la minore, il residuo è la zona BMNC; quindi per la Regola del Tre io dico: la zona BMNC è alla

zona

zona ABCD, reciprocamente, come la diſtanza XL dal centro di gravità della zona ABCD al centro di gravità L della zona AMND è ad un quarto termine, che sarà la diſtanza LZ dal centro di gravità Z della zona BMNC al centro L della zona AMND, dovendo le due zone ABCD, BMNC eſſer' in equilibrio intorno al centro L della zona AMND, ch'eſſe compongono.

306. AVVERTIMENTO. Io avrei molte coſe d'aggiugnere intorno a'centri di gravità de'Corpi; ma ſiccome queſta materia è aſſai più difficile che utile, così penſo di paſſarla ſotto ſilenzio, non facendo che ſuggerire a' curioſi il libro intitolato la *Miſura delle Superficie e de' Solidi mediante l'Aritmetica degl' Infiniti, ed i Centri di gravità* da me fatto ſtampare in Parigi l' anno 1740 preſſo M^r.*Jombert* Librajo, dove ho trattato queſta materia coll' ultimo dell'eſattezza.

Della Diſceſa de' Corpi ſu' Piani inclinati.

307. Se due, o più corpi A, B, C, D (*Fig.* 131.), congiunti inſieme, equilibrano intorno ad un centro d' equilibrio H, lo sforzo totale della lor gravità è riunito in eſſo punto; poichè equilibrandoſi queſti corpi intorno al punto H, cioè le forze da un lato equivalendo a quelle dell' altro, è manifeſto, che'l punto H ſostiene tutto il loro sforzo, e ch' eſſi tanto agiſcono ſopra detto punto, come ſe tutti vi foſſero attaccati; e lo ſteſſo dicaſi dello sforzo, che tutte le parti d'un corpo fanno intorno al centro di gravità di eſſo corpo; tal che tutte queſte parti conſiderar ſi poſſono quaſi riunite ad eſſo centro, e facenti tanto sforzo per farlo diſcendere verſo 'l centro della terra, quanto ciaſcuna d'eſſe ne fa nel loro ſito.

308. *Se un corpo* AB (Fig. 132.) *è poſto ſopra un piano orizzontale, tal che la linea* XQ *tirata dal ſuo centro* X *perpendicolarmente all' orizzonte cada nella baſe* AM, *ſu cui s' appoggia il corpo, detto corpo ſuſſiſterà ſopra la ſua baſe ſenza cadere: ma ſe la verticale* XQ *cade fuori della baſe* AM, *il corpo caderà ſenza poter ſuſſiſtere ſopra la ſua baſe.*

Nel primo caſo (*Fig.* 132.), è manifeſto, che ſe 'l centro di gravità X foſſe ſoſtenuto da un perno XQ perpendicolare all' orizzonte, eſſendo tutte le parti di eſſo corpo in equilibrio intorno a detto punto, il loro sforzo ſi riunirebbe in X per farlo diſcendere ſecondo la direzione XQ. Ora 'l punto XQ reſiſtendo

ſecondo

secondo la direzione opposta a questo sforzo, non potrebbe il centro X muoversi, e per conseguenza tutte le parti del corpo resterebbero in quiete intorno a lui: ma X è sostenuto dalle parti inferiori del solido, nello stesso modo ch'ei lo sarebbe dal perno XQ; dunque, ec.

Nel secondo caso (*Fig.* 133.), il centro di gravità non vien sostenuto da cosa alcuna; però lo sforzo riunito di tutte le parti del corpo, non trovando verun'ostacolo, dee far'abbassare questo punto, il che non può succedere quando'l corpo non si rovesci.

309. *Se un corpo* AB (Fig. 134.) *è posto sopra un piano inclinato* MN, *tal che la linea* XO *tirata dal suo centro* X *perpendicolarmente all'orizzonte non passi per la sua base* AC, *detto corpo si ribalterà sul piano inclinato: ma se la verticale* XO *passa per la sua base* AC (Fig. 135.), *il corpo sdrucciolerà sul piano senza ribaltarsi.*

Nel primo caso il corpo caderebbe, quando anche ei fosse appoggiato sopra un piano orizzontale MC; dunque molto più, quando la sua base sarà sopra un piano inclinato.

Nel secondo poi, lo sforzo di tutte le parti del corpo spigne'l centro X secondo la direzione verticale XO, che passa per la base; così se questa base fosse orizzontale, il corpo rimarrebbe ritto senza muoversi: ma siccome la pressione verticale XO, che si fa sopra la base e 'l piano inclinato, è obbliqua a detto piano, così da X io tiro la retta XR perpendicolare al piano inclinato; e terminando 'l parallelogrammo RXOS, la forza verticale XO è composta della forza perpendicolare XR, a cui'l piano inclinato resiste invincibilmente, e della forza XS, la quale sul piano punto non agisce; però il centro di gravità dee prender la direzione XS. Ma esso non può pigliar questa tal direzione, quando tutte le parti del corpo non lo seguano; onde il corpo dee secondo questa tal direzione sdrucciolare lungo'l piano inclinato.

310. Quantunque sopra un piano inclinato si possa metter qualsisia corpo di qualunque figura, tutta volta noi ci ristrigneremo ai soli corpi sferici, come A (*Fig.* 136.), il cui moto dee farsi rotolando, perchè la direzione verticale AZ del suo centro di gravità A cade sempre fuori del punto C, ove la sfera tocca'l piano.

311. PROPOSIZIONE L. *Se un corpo discende sopra un piano inclinato* BR (Fig. 136.), *egli scende con minor velocità, che se discendesse liberamente verso'l centro della terra.*

La gravità d'un corpo lo spigne secondo la verticale AZ, ch' è inclinata al piano BR; onde dal punto A conducendo la retta AC perpendicolare al piano BR, e terminando 'l parallelogrammo ACZD, la gravità AZ è composta delle forze AC, e AD: ma il piano invincibilmente resiste alla forza AC; dunque la gravità più non agisce sul corpo se non colla direzione, e colla forza AD minor della forza AX, e per conseguenza il corpo essendo spinto con una forza minore di quella che lo spignerebbe verso 'l centro della terra, dee pur' andare con minor velocità.

312. Noi chiameremo *Gravità assoluta* la gravità d'un corpo, che liberamente discende verso 'l centro della terra, e *relativa* quella forza, che resta alla gravità d'un corpo per farlo discendere lungo un piano inclinato. Così nella Figura 136, essendo la gravità assoluta del corpo B espressa dalla verticale AZ, ch'è la diagonale del parallelogrammo CADZ, la sua gravità relativa sarà la forza AD, con cui detto corpo scende lungo 'l piano inclinato.

313. *Se un corpo* A (Fig. 136.) *discende sopra un piano inclinato* BR, *la sua gravità assoluta è alla relativa, come il seno retto è al seno dell'angolo d'inclinazione* BRO, *che 'l piano* BR *forma colla sua base orizzontale* OR, *o come il lato* BR *del piano inclinato alla sua altezza* BO.

Prolungo AZ fino alla base OR in S, e simili sono i triangoli rettangoli ACZ, SZR, a cagione degli angoli acuti CZA, SZR opposti al vertice; onde AZ . CZ, ovvero AD : : ZR . ZS: ma a motivo de' triangoli simili SZR, OBR noi abbiamo ZR. ZS : : BR. BO; dunque AZ. AD : : BR . BO, cioè la gravità assoluta AZ è alla relativa AD, come la lunghezza BR del piano inclinato alla sua altezza BO.

Ora, nel triangolo rettangolo BRO, la lunghezza BR è all'altezza BO, come il seno dell'angolo retto BOR è al seno dell' angolo BRO d' inclinazione del piano BR sopra la sua base. Dunque la gravità assoluta è alla relativa, come il seno retto è al seno dell'angolo d'inclinazione del piano sopra la base.

314. Quanto più diminuisce l'angolo d'inclinazione BRO tanto minore diventa 'l seno di quest'angolo rispetto al seno retto, ed in conseguenza più ancora diminuisce la gravità relativa AD per rapporto all'assoluta, ch'è sempre la stessa; così, a misura che BR è più inclinato all'orizzonte, con tanta minor velocità il corpo discende sopra detto piano.

315. Se

315. *Se un corpo* A (Fig. 137.) *discende a mano a mano lungo differenti Piani diversamente inclinati all' orizzonte* BC , CD, EC, ec. *le gravità relative su questi differenti Piani sono fra loro come i seni degli angoli d' inclinazione* BCH , DCH, ECH *de' Piani inclinati*.

Poichè chiamando P la gravità assoluta del corpo, S il seno totale, R la gravità relativa del corpo A sul piano DC , *r* la sua gravità relativa sul piano BC, V il seno dell' angolo d'inclinazione DCH del piano DC, ed *u* quello dell'angolo d'inclinazione BCH del piano BC, per rapporto al piano DC noi avremo P. R : : S. V , ovvero P. S : : R. V , e per rapporto al piano BC avremo P. *r* : : S. *u*, ovvero P. S : : *r*. *u*; onde R . V : : *r*. *u*, e però R. *r* : : V. *u*, cioè la gravità relativa sul piano DC è alla relativa sul piano BD, come il seno V dell'angolo d' inclinazione del piano DC è al seno *u* dell'angolo d'inclinazione del piano BC; e così degli altri.

316. PROPOSIZIONE LI. *Se una potenza* P (Fig. 138.) *sostiene un corpo* A *sopra un piano inclinato* BC *con una direzione* PA *parallela a* BC, *in modo che la potenza e'l peso sieno in equilibrio, la potenza è al peso, come la gravità relativa è all' assoluta, o come l'altezza del Piano inclinato è alla sua lunghezza* BC, *o finalmente come il seno dell'angolo d'inclinazione del Piano è al seno retto*.

Dal centro A conduco la verticale AZ, che sega 'l piano inclinato in Z, e la retta AC perpendicolare a detto piano; e terminando'l parallelogrammo ACZD , la gravità assoluta è alla relativa , come AZ, e AD: così , non essendo 'l corpo mosso che dalla gravità relativa AD, la potenza P, che tira 'l corpo colla direzione AP direttamente opposta, e ch'è in equilibrio con AD, dee esser' espressa dalla retta AM uguale a AD ; e per conseguente MA. AZ : : AD . AZ , cioè la potenza P è alla gravità assoluta AZ, o al peso A , come la relativa AD all' assoluta AZ.

Ora la gravità relativa è all'assoluta, come 'l altezza del piano inclinato è alla sua lunghezza, o come il seno dell' angolo d'inclinazione al seno totale ; dunque la potenza P è al peso A nella stesse ragioni.

317. Se in vece d'una potenza , che tira 'l corpo da A verso P, se ne mettesse una, che'l rispignesse da D verso A secondo la direzione DA, e che la potenza e'l peso fossero in equilibrio,

la potenza sarebbe ancora al peso, come la gravità relativa è all' assoluta, ec. il ch'è per se evidente.

318. Se in vece d'una potenza, che sostiene 'l corpo, mettesi un peso R (*Fig.* 139.), che tiri detto corpo secondo la direzione XA parallela al piano inclinato BC mediante una Carrucola, o Girella X, su cui passa la corda, donde pende il peso R, e che i pesi R, ed A sieno in equilibrio, il peso R è ancora al peso A, come la gravità relativa di A è all' assoluta, ovvero, ec. poichè l'effetto del peso R sarà pure espresso dalla retta MA uguale alla retta AD, ch' esprime la gravità relativa del corpo A: così, siccome 'l peso R, il quale non è sopra verun piano inclinato, tende verso 'l centro della terra con tutta la sua forza, o con tutta la sua gravità assoluta, è evidente, che 'l peso totale di R esser dee al peso totale di A, come MA, ovvero AD è ad AZ.

319. PROPOSIZIONE LII. *Sopra un piano inclinato* BC *siavi un corpo sferico* A (Fig. 140.), *la cui gravità assoluta sia espressa dalla verticale* AZ, *e la relativa dalla retta* AD *parallela al piano inclinato* BC: *se prolungasi* AD *dal lato opposto, e che dopo aver fatto* MA = AD, *ed aver da punti* M, D *condotto le rette* PQ, ZK *parallele alla retta* EG *perpendicolare al piano* BC *nel punto del contatto* G, *da* A *si tirino delle rette sopra tutt'i punti di* PQ, *e dell'altre sopra tutti quelli punti di* ZK *dico; che tutte queste linee, fuori di quelle che passano per l'angolo* QAE, *e per l'angolo* GAZ *opposto al vertice all' angolo* QAE, *esprimeran delle potenze, ciascuna delle quali nella sua direzione equilibrerà col corpo* A; *cioè le potenze* AH, AL, AP, ec. *saranno in equilibrio tirando 'l corpo verso la retta* PQ, *su cui esse terminano, e le potenze* AK, AN, AD, ec. *che terminano sopra* ZK, *saran parimente in equilibrio spignendo 'l corpo verso la stessa retta* PQ.

Noi sappiamo, che la gravità assoluta AZ è composta della forza AG, a cui 'l piano invincibilmente resiste, e della forza AD parallela al piano inclinato BC: ora la direzione della potenza AH, che tira 'l corpo verso H, essendo obbliqua alla forza AD, è composta delle due HR, HM, ovvero delle due MA, AR, di cui la prima MA, che tira da A verso M, è uguale ed opposta alla gravità relativa AD, e l'altra AR, che tira da A verso R, è ben' opposta, ma minore della forza AG. Così la forza MA equilibra colla gravità relativa AD, e la forza

AR,

AR non distruggendo ch' una parte della forza AG, non può impedire 'l corpo A d' appoggiarsi sul piano: dunque la forza AH equivalente alle due AM, AR è in equilibrio col corpo A; e lo stesso noi proveremo di tutte le potenze, le quali sono fra la direzione AM parallela al piano inclinato, e la verticale AQ, ch' equivale alla gravità assoluta AZ, perch' è composta della forza AE che tira da A verso E, e della forza AM che tira da A verso M, e perchè le due forze AE, AM son' uguali ed opposte ciascuna a ciascuna alle due AG, AD componenti la gravità assoluta AZ. Le potenze AF, AP, ec. che passano nell'angolo TAG, sono pure in equilibro col corpo A, perchè la potenza FA è composta delle forze FM, ed F*p*, ovvero della forza A*p*, che tira da A verso *p*, e della forza MA, che tira da M verso A: ma MA equilibra colla gravità relativa AD, ed altro non fa la forza A*p* che vie più consolidare il corpo sul piano inclinato; dunque, ec.

Le potenze, che passano nell'angolo EA*t*, son' uguali ciascuna a ciascuna a quelle, che passan nell' angolo TAG, e fanno lo stesso effetto spignendo 'l corpo A, che fan l'altre tirandolo: onde queste potenze sono ancora in equilibrio col corpo A; e per la stessa ragione quelle, che passano per l'angolo *t*AZ opposto al vertice all'angolo TAQ, sono parimente in equilibrio col corpo A, poich'esse fanno lo stesso effetto spignendo questo corpo, che le potenze dell'angolo TAQ tirandolo.

Le potenze, che sono nell' angolo QAE, non potrebbero esser' in equilibrio col corpo A, perchè la potenza AX è composta della forza XM, od AY, che tira da A verso Y, e della forza YX, od AM, che tira da A verso M. Ora MA è uguale ed opposta alla gravità relativa AD; ma AY è maggiore di AG, che le è opposta; dunque la forza AX, composta delle due AY, AM, è maggiore della gravità assoluta, e conseguentemente AX dee alzare il corpo; e così, ec.

Che se le potenze, le quali passano nell'angolo QAE, spignessero il corpo A, in vece di tirarlo, n' avverrebbe, che le stesse accrescerebbono la pressione del corpo sul piano inclinato BC, e che detto corpo discenderebbe col doppio di velocità; poichè la potenza XA, che spigne da X verso A, è composta della forza XM, od YA, che spigne da Y verso A, e della forza XY, od MA, che spigne da M verso A: così XM accrescerebbe la pressione del corpo A al punto G, ed MA unito ad

AD

AD conferirebbe al corpo una velocità doppia di quella, che gl' imprime la gravità relativa AD; e lo stesso dicasi delle potenze, che passano nell'angolo GAZ, poichè queste son' uguali ciascuna a ciascuna a quelle, che passan per l'angolo QAE, e fanno lo stesso effetto tirando'l corpo, che l'altre spignendolo.

Per ciò che spetta alla potenza AE in particolare, è manifesto, che s' ella tirando da A verso E equivale alla forza AG, ch' è l'una delle componenti della gravità, cesserà la pressione del corpo A sul piano; ma la forza AD, ch'è l'altra componente, sempre agirà, e però il corpo A non cesserà di discendere: che se la potenza AE è minor di AG, la pressione del corpo A sul piano inclinato diminuirà, e'l corpo continuerà ancora a discendere: in fine, se AE è maggior di AG, la potenza AE leverà il corpo A al di sopra del piano; ma AD lo farà sempre discender secondo la sua direzione, non essendo la forza AE composta d'alcun'altra forza, che sia in tutto, od in parte contraria alla forza AD. Che se AE spignesse 'l corpo da E verso A, ell'accrescerebbe la pressione del corpo sul piano a proporzione della sua grandezza: ma per grande ch' ella si fosse non impedirebbe giammai al corpo di scendere giusta la direzione AD, e lo stesso dicasi di quella, che tirasse secondo la direzione GA.

320. COROLLARIO I°. *Se prolunghansi le direzioni delle sopr' accennate potenze, finchè seghino 'l piano inclinato: p. e. se prolungasi* HA, *finchè seghi 'l piano inclinato* BC *in* h, *ov' essa formerà un' angolo* HhB, *che noi chiameremo angolo di* Trazione, *dico; che ciascuna potenza sarà alla gravità assoluta* AZ, *ovvero al peso* A, *come il seno dell' angolo d' inclinazione* BCO *del piano sulla sua base è al seno di compimento all' angolo retto dell' angolo* HhB *di trazione*.

Prolungo AZ fino alla base OC in *a* (*Fig.* 141.): ora, simili essendo i triangoli GAZ, *a*ZC, a cagione dell'angolo acuto GZA uguale all' acuto *a*ZC, che gli è opposto al vertice, l'angolo GAZ equivale all'angolo d'inclinazione ZC*a* del piano BC sopra la base OC, e nel triangolo rettangolo GA*b*, l'angolo GA*b* è l' angolo di compimento ad un retto dell' angolo di trazione G*b*A. Così pigliando per seno totale la retta AG, e dal punto G tirando la perpendicolare G*g* sopra AZ, e la perpendicolare G*m* sopra A*b*, la retta G*g* sarà'l seno dell' angolo GAZ d' inclinazione del piano sopra la sua base, e la retta G*m* sarà quel-

quello del compimento GAb ad un retto dell' angolo di trazione GbA. Ciò posto.

Il triangolo rettangolo HMA è simile al triangolo rettangolo GAb, e questo al triangolo GAm; dunque HMA è simile a GAm, e noi abbiamo HA. MA : : AG. Gm : ma MA $=$ AD $=$ GZ; onde HA. GZ : : AG. Gm, e però HA $\times$ Gm $=$ GZ $\times$ AG.

I triangoli simili AZG, AGg ci danno AZ. GZ : : AG. Gg; dunque AZ $\times$ Gg $=$ GZ $\times$ AG : ma HA $\times$ Gm $=$ GZ $\times$ AG; onde HA $\times$ Gm $=$ AZ $\times$ Gg, e però HA. AZ : : Gg. Gm, cioè la potenza HA è alla gravità assoluta AZ, ovvero al peso A, come il seno Gg dell'angolo d'inclinazione del piano è al seno Gm dell' angolo GAm compimento all' angolo retto dell' angolo GbA di trazione. Lo stesso noi proveremo di tutte le potenze contenute fra la retta TA parallela al piano inclinato, e la verticale ZQ, come ancora di tutte quelle, che passano per l'angolo ZAt opposto al vertice all' angolo TAQ; poichè queste il corpo spignendo, fanno 'l medesimo effetto di quelle, che passan per l'angolo TAQ, e tirano esso corpo.

Quanto alle potenze, che passano per l'angolo TAG (*Fig.* 142.), conduco parimente la retta Gm perpendicolare ad AL, e la retta Gg perpendicolare ad AZ; e pigliando per seno totale la retta AG, ho, come sopra, la retta Gg pel seno dell' angolo GAg, uguale all'angolo d'inclinazione BCO, e la retta Gm pel seno dell'angolo GAL compimento all'angolo retto dell' angolo ALG di trazione: ma i triangoli rettangoli FAM, LGA son simili, a motivo dell' angolo acuto MAF uguale all' acuto ALG, che gli è alterno; e 'l triangolo rettangolo LAG è simile al triangolo rettangolo mGA, a cagione di mG perpendicolare sopra l'ipotenusa LA; onde i triangoli FMA, mGA son simili, e ci danno FA. MA, o GZ : : AG. Gm; però FA $\times$ Gm $=$ GZ $\times$ AG.

Così pure, i triangoli rettangoli simili AGZ, AgG ci danno AZ. ZG : : AG. Gg; dunque AZ $\times$ Gg $=$ GZ $\times$ AG, e però FA $\times$ Gm $=$ AZ $\times$ Gg; dal che io deduco FA. AZ : : Gg. Gm, cioè anche la potenza FA è alla gravità assoluta AZ, ovvero al peso A, come il seno Gg dell' angolo d' inclinazione del piano sopra la sua base è al seno Gm dell' angolo GAm compimento all' angolo retto dell'angolo di trazione ALG. Ed egli è manifesto, che le potenze, le quali passano per l' angolo EAt opposto al

ver-

vertice all'angolo TAG, sono altresì al peso, come il seno dell'angolo d' inclinazione al seno di compimento all' angolo retto dell'angolo di trazione; poichè queste potenze spignendo 'l corpo, fanno 'l medesimo effetto, che l'altre tirandolo.

321. COROLLARIO II. Quindi, quantunque dir si possa, che tutte le potenze oblique al piano inclinato BC, ed in equilibrio col corpo A sieno ad esso corpo, come il seno dell'angolo d'inclinazione al seno di compimento dell'angolo di trazione, non per ciò ne viene in conseguenza, che tutte le potenze, le quali sono al peso come il seno dell'angolo d' inclinazione al seno di compimento dell' angolo di trazione, sieno in equilibrio col corpo; avendo dimostrato, che le potenze, le quali passano per gli angoli QAE, GAZ, non possono esser' in equilibrio con A.

322. COROLLARIO III. Quando la direzione FA (*Fig.*143.) è orizzontale, o parallela alla base OC, la potenza FA è alla gravità assoluta AZ, ovvero al peso A, come l' altezza BO del piano inclinato è alla sua base OC; perchè allora il seno G*m* dell' angolo di compimento dell' angolo di trazione equivale alla retta A*g*, la quale nel triangolo AG*g* è 'l seno dell'angolo AG*g* compimento all' angolo retto dell' angolo GA*g* uguale all'angolo d' inclinazione BCO: così AG*g* è uguale all' angolo OBC del triangolo OBC, ch'è altresì 'l compimento all'angolo retto di BCO. Poichè dunque la potenza è al peso, come G*g* ad A*g*, e perchè G*g*. A*g* :: BO. OC, la potenza è parimente al peso, come l' altezza BO alla base OC.

323. COROLLARIO IV. La minore di tutte le potenze, che sono in equilibrio col corpo A (*Fig.* 140.), è quella, la cui direzione MA è parallela al piano inclinato, e l' altre son tanto maggiori, quanto più elle d' amendue le parti da essa s' allontanano. Il che, dopo le cose prefate, chiaro si scorge colla sola ispezione della Figura.

324. PROPOSIZIONE LIII. *Se due corpi* B, A (Fig.144.) *equilibransi sopra due piani* CE, ED *con direzioni contrarie* BH, HA *parallele a' piani inclinati, essi sono fra loro reciprocamente come i seni degli angoli d' inclinazione de' loro piani, cioè* B *è ad* A, *come il seno dell' angolo* CDE *a quello dell' angolo* DEC.

Supponiamo, ch' una potenza posta in H equilibri col corpo A. Ora, chiamando V la potenza H, S il seno dell'ango-

lo

lo d'inclinazione CDE, s quello dell'angolo d'inclinazione CED, ed R il seno totale, avremo $V . A :: S . R$ (*N.* 316.), e però $V \times R = S \times A$.

I due corpi A, e B essendo in equilibrio, han forze uguali; e conseguentemente la stessa V, che sosterria 'l corpo A secondo la direzione HA, sosterrebbe pure il corpo B colla direzione HB; onde ponendo questa potenza in vece del corpo A, avremo $V . B :: s . R$, e però $V \times R = B \times s$: ma $V \times R = S \times A$; dunque $B \times s = S \times A$, e quindi $B . A :: S . s$.

Se l'altezze di due piani inclinati son'uguali, i due corpi sono fra loro come le lunghezze degli stessi piani. Imperocchè, rispetto al piano inclinato CD avremo $S . R :: CP . CD$ (*N.* 316.); e però $V . A :: CP . CD$, il che ci dà $V \times CD = A \times CP$, ovvero $V = \frac{A \times CP}{CD}$; e rispetto al piano inclinato CE avremo $s . R :: CP . CE$. Dunque $V . B :: CP . CE$, il che ci dà $V \times CE = B \times CP$, od $V = \frac{B \times CE}{CP}$; onde $\frac{A \times CP}{CD} = \frac{B \times CP}{CE}$, o pure $\frac{A}{CD} = \frac{B}{CE}$. Così moltiplicando per CD e per CE, avremo $A \times CE = B \times CD$; dal che io deduco $A . B :: CD . CE$.

325. COROLLARIO. *Se due corpi* B, A (Fig. 145.) *tengons' in equilibrio sopra due piani inclinati* EC, HD *con una direzione parallela alla sua base* CD, *detti due corpi sono fra loro in ragion composta dell' inversa de' seni degli angoli* C D, *d' inclinazione de' piani, e della diretta de' seni degli angoli di compimento degli angoli di trazione.*

Chiamiamo S il seno dell'angolo ECD, s quello dell' angolo HDC, T il seno di compimento dell'angolo di trazione BMC, t quello di compimento dell'angolo di trazione AND, ed V la potenza, che sosterrebbe il corpo A in equilibrio colla direzione MA; dunque $V . A :: s . t$, e però $Vt = As$, od $V = \frac{As}{t}$: ora l'istessa potenza V sarebbe pure in equilibrio con B; onde $V . B :: S . T$ (*N.* 320.), e conseguentemente $VT = BS$, ed $V = \frac{BS}{T}$. Dunque $\frac{AS}{t} = \frac{BS}{T}$, ovvero $AsT = BSt$, dal che io inferisco $B . A :: sT . St$. Ma la ragione $sT . St$ è composta della ragione $s . S$, ch'è l' inversa di quella de' seni S, s, e della di-

diretta T, *t* dei feni de' compimenti degli angoli di trazione, onde ec.

Se l'altezze EP, HR de' piani inclinati fon'uguali, i corpi B, A fono fra fe come le bafi CP, RD de' loro piani inclinati. Poichè, rifpetto al piano inclinato HD, noi avremo V. A :: HR. RD (*N.* 322.); dunque $V = \frac{A \times HR}{RD}$: e rifpetto al piano inclinato EC, noi avremo V. B :: EP, od HR. PC, e però $V = \frac{B \times HR}{PC}$; onde $\frac{A \times HR}{RD} = \frac{B \times HR}{PC}$, ovvero $\frac{A}{RD} = \frac{B}{PC}$, o finalmente $A \times PC = B \times RD$; dunque B. A :: PC. RD.

326. COROLLARIO II. Se i due corpi B, A (*Fig.* 146.) foffero in equilibrio fopra i piani inclinati EC, ED con direzioni HB, HA obblique al piano, troveremmo come fopra (*N.*324.), che detti due corpi A e B farebbero fra loro in ragion compofta dell' inverfa dei feni degli angoli d'inclinazione, e della diretta de' feni degli angoli di compimento degli angoli di trazione.

327. PROPOSIZIONE LIV. *Un corpo, che fcende lungo un piano inclinato, difcende con un moto uniformemente accelerato.*

La gravità affoluta d'un corpo A, che difcende lungo un piano inclinato BC (*Fig.* 147.), è alla fua gravità relativa, come la lunghezza BC del piano alla fua altezza BO (*N.*313.); vale a dire, fe 'l corpo difcendendo liberamente verfo 'l centro della terra defcrivefse in un dato tempo uno fpazio uguale a BO, detto fpazio farebbe allo fpazio BA, che 'l medefimo corpo defcriverebbe nello ftefso tempo fopra 'l piano inclinato, come la lunghezza BC è all'altezza BO. Pofto dunque, che 'l corpo cadendo liberamente impiegafse due tempi a fcorrer BO, lo fpazio BP fcorfo nel primo tempo farebbe allo fpazio BO fcorfo ne' due primi, come il quadro 1 del primo tempo è al quadro 4 de' due primi. Ora lo fpazio BP fcorfo nel primo tempo è allo fpazio BR, che 'l corpo fcorrerebbe nel medefimo tempo fopra 'l piano inclinato, come BC. BO, cioè BP. BR :: BC. BO; e lo fpazio BO fcorfo ne' due primi tempi è allo fpazio BA, che 'l corpo fcorrerebbe negl' ifteffi due primi tempi, come BC. BO, cioè BO. BA :: BC. BO: dunque BP. BR :: BO. BA, ovvero BP. BO :: BR. BA. Ma BP. BO :: 1. 4; onde BR. BA :: 1. 4 e per confeguente il moto del corpo A lungo 'l piano inclinato BC è accelerato, perchè gli fpazj fcorfi BR, BO fono fra fe come i quadri 1. 4 de' tempi 1. 2 impiegati a fcorrerli.

328. CO-

328. COROLLARIO I°. Onde quanto s' è detto rispetto al moto accelerato de' corpi, i quali discendono liberamente verso 'l centro della Terra, dee pure dirsi del moto accelerato de' corpi, che discendono lungo i piani inclinati. Così, 1°. gli spazj scorsi in fine d'un primo tempo, de' due primi, de' tre primi, ec. sono fra loro come i quadri de' tempi impiegati a scorrerli. 2°. Le velocità acquistate in fine degli spazj sono fra se come le radici quadre degl' ispazj, o come i tempi impiegati a scorrer detti spazj. 3°. Se 'l corpo si muovesse con una velocità uniforme uguale a quell' acquistata in fine d' uno spazio scorso in un dato tempo, detto corpo in un tempo uguale a quello ne scorrerebbe un doppio. 4°. Finalmente, se 'l corpo colla velocità acquistata in fine del piano inclinato risalisse lungo detto piano, egli ascenderebbe tanto alto, quanto sarebbe disceso in un tempo uguale a quello da esso impiegato a scendere.

329. COROLLARIO II. *La velocità da un corpo* A *acquistata scorrendo in un dato tempo sopra un piano inclinato* BC *uno spazio* BA, *è alla velocità, ch' esso avrebbe acquistata in un tempo uguale, discendendo liberamente verso 'l centro della terra, come l' altezza* BO *del piano inclinato è alla sua lunghezza* BC.

Lo spazio BO, cui 'l corpo avrebbe scorso discendendo liberamente, è allo spazio BA scorso nel medesimo tempo sopra 'l piano inclinato, come BC a BO. Ora, colla velocità acquistata in fine dello spazio BO, il corpo mosso uniformemente scorrerebbe uno spazio doppio di BO in un tempo uguale a quello da esso impiegato nel discendere lungo BO (per le regole del moto accelerato), e colla velocità acquistata in fine di BA ei scorrerebbe uniformemente uno spazio doppio di BA; onde gli spazj scorsi in uno stesso tempo in questi due moti uniformi sarebbero fra loro come 2BO a 2BA, ovvero come BO a BA, e per conseguente come la lunghezza BC all' altezza BO: ma nel moto uniforme le velocità sono come gli spazj scorsi ne' medesimi tempi; dunque le due velocità uniformi sarebbero fra loro come BC a BO. Ora queste due velocità son le stesse di quelle acquistate in fine degli spazj BO, BA; però la velocità acquistata in fine di BA è a quella in fine di BO scorso in un medesimo tempo di BA, come l' altezza BO d l piano è alla sua lunghezza BC, o come il seno dell' angolo d' inclinazione al seno totale (*N.* 316.).

330. PROBLEMA. *Dato lo spazio* BP (Fig. 147.), *ch' un corpo in un dato tempo scorrerebbe discendendo liberamente verso 'l*

centro della terra, conoscer quello, che in un' egual tempo egli dee scorrere sopra un piano inclinato BC.

Dal punto P sopra'l piano inclinato io abbasso la perpendicolare PR, e BR è lo spazio cereato, perchè, a motivo dell' angolo acuto comune PBR, simili sono i triangoli rettangoli PBR. OBC; dunque PB. BR : : BC. BO.

331. PROBLEMA. *Dato lo spazio* AH (Fig. 148.), *ch'un corpo in un dato tempo scorreria discendendo liberamente verso 'l centro della terra, conoscer gli spazj ch' ei scorrerebbe, se discendesse successivamente sopra piani disugualmente inclinati* AM, AN, AP, ec. *in tempi uguali a quello da esso consumato nel discendere.*

Dal punto H sopra i piani inclinati io conduco le perpendicolari NR, NS, NT, ec. e le rette AR, AS, AT, ec. sono gli spazj cercati, perchè i triangoli simili AMH, ARH ci danno AR. AH : : AH. AM; onde lo spazio AR è scorso sul piano inclinato AM in un tempo uguale a quello dal corpo consumato nell'iscorrer' AH; e proveremo pure rispetto al piano inclinato AN, che AS. AH : : AH. AN, e così degli altri.

332. COROLLARIO I°. *Le velocità acquistate in fine degli spazj* AR, AS, AT, ec. *sono fra se come detti spazj.*

Chiamando V la velocità acquistata in fine di AH, T quella acquistata in fine di AR, ed X quella acquistata in fine di AS, rispetto al piano inclinato AM, avremo T. V : : RA. AH (*N.* 329.), e T × AH = V × RA; e rispetto al piano inclinato AN, avremo X. V : : AS. AH, il che ci dà X × AH = V × AS. Dunque T × AH. X × AH : : V × RA. V × AS, ovvero, dividendo la prima ragione per AH, e la seconda per V, s'avrà T. X : : AR. AS.

Proveremo nello stesso modo, che queste velocità sono fra se come i seni degli angoli d'inclinazione de' piani; poichè chiamando R il seno totale, M l'angolo d'inclinazione del piano AM, ed *m* quello del piano AN, rispetto al piano AM, avremo T. V : : M. R (*N.* 329.), ovvero TR = VM, e rispetto al piano AN, avremo X. V : : *m*. R, ovvero XR = V*m*; onde TR. XR : : VM. V*m*, o pure T. X : : M. *m*.

333. COROLLARIO II. Perchè tutt'i triangoli HAR, HAS, HAT, ec. son rettangoli sulla stessa base AH, il circolo descritto col diametro AH passa per tutt'i vertici R, S, T, ec. di questi triangoli; il che ci fa comprendere, che se dall' estremità A del diametro AH d'un circolo AHB tiransi quante si voglia corde

de AR, AS, AT, ec. un corpo non consumerebbe più tempo a discendere lungo 'l diametro AH di quello farebbe a discender lungo la corda AR, od AS, od AT, ec. cioè tutte le corde farebbero scorse in tempi uguali a quello che 'l corpo impiegherebbe nel cadere dall' altezza AH.

Più ancora, se dall'altro termine H del diametro tiransi quante si voglia corde HR, HS, HT, ec. ognuna di esse sarà pure scorsa in un tempo uguale a quello, che 'l corpo impiegherebbe nel cadere dall' altezza AH. Il che io così dimostro.

Dal punto A tiro la tangente AL; prolungo la corda HR, finchè seghi la tangente in L, e da L abbasso la perpendicolare LI sopra HM. Quando 'l corpo posto al punto R del piano inclinato LH avrà scorso lo spazio RH, detto spazio sarà a quello, ch' egli avrebbe scorso nel medesimo tempo, se fosse liberamente disceso verso 'l centro della terra, come l'altezza LI, od AH del piano inclinato è alla sua lunghezza LH: ma i triangoli rettangoli LAH, RAH, essendo simili, ci danno AH. LH :: RH. AH; onde lo spazio RH scorso dal corpo sopra LH è a quello, ch' ei avria nel medesimo tempo scorso discendendo liberamente verso 'l centro della terra, come RH ad AH. Così chiamando x lo spazio, che 'l corpo avrebbe liberamente scorso, avremo RH. x :: RH. AH, ed in conseguenza $x = AH$, cioè AH è lo spazio, che 'l corpo avrebbe scorso cadendo verso 'l centro della terra in un tempo uguale a quello, ch' esso ha impiegato nell' iscorrer la corda RH: e lo stesso noi proveremo rispetto all'altre corde AS, AT, ec.

334. PROPOSIZIONE LV. *La velocità acquistata da un corpo, quando è disceso lungo un piano inclinato* AM (Fig. 148.), *è uguale a quella, ch' esso avrebbe acquistata, se fosse liberamente caduto dall' altezza* AH *di detto piano.*

Per brevità, chiamerò uAR la velocità acquistata in fine dello spazio AR, uAM quella acquistata in fine dello spazio AM, ed uAH l' acquistata per la caduta AH. Ora noi abbiamo uAR. uAH :: AR. AH (*N.* 329.), e perchè gli spazj AR, AM sono scorsi con un moto accelerato, noi abbiam pure uAR. uAM :: $\sqrt{AR}$. $\sqrt{AM}$: ma i triangoli simili RAH, MAH ci danno RA. AH :: AH. AM; dunque $\overline{RA}^2$. $\overline{AH}^2$ :: RA. AM, ed estraendo la radice quadra, abbiamo RA. AH :: $\sqrt{AR}$. $\sqrt{AM}$,

quin-

quindi $uAR . uAM :: RA . AH$. Ma egli s' è trovato $uAR . uAH :: RA . AH$; onde $uAR . uAM :: uAR . uAH$, e però $uAM = uAH$.

335. COROLLARIO I°. Quindi n'avviene, che se uno, o più corpi discendono lungo più piani diversamente inclinati AM, AN, AP, ec. ma della medesima altezza AH, le velocità acquistate in fine di essi piani son tutte fra loro uguali, perchè equivagliono ciascheduna alla velocità acquistata dalla caduta AH.

336. COROLLARIO II. Quindi ancora ne segue, che se un corpo discende lungo più piani diversamente inclinati AM, MN, NR, ec. (*Fig.* 149.), la velocità acquistata in fine dell'ultimo piano in R è uguale a quella, ch'esso avrebbe acquistata cadendo dall'altezza AV uguale alla somma dell'altezze de' piani. Il che io provo nel seguente modo.

Dal punto A io tiro AT parallela all'orizzonte, e prolungo i piani NM, RN, finchè seghino AT ne' punti H, T. La velocità acquistata in fine del piano AM è uguale alla velocità, ch' esso avrebbe acquistata discendendo lungo 'l piano MH, la cui altezza AS è la medesima che quella del piano AM; così continuando detto corpo a muoversi lungo MN, la velocità acquistata in fine de' due piani AM, MN sarà la stessa di quella, ch' egli avrebbe acquistata, se fosse disceso lungo NH. Ora questa è uguale a quella, ch' ei avrebbe acquistata, se fosse disceso lungo 'l piano NT, perchè i due piani NT, NH han la medesima altezza AP; onde la velocità acquistata lungo i due piani AM, MN equivale a quella, ch'esso avrebbe acquistata lungo 'l solo piano TN; e perciò, continuando questo corpo a muoversi lungo NR, la sua velocità acquistata in R lungo i tre piani AM, MN, NR equivale a quella, ch' egli avrebbe acquistata lungo TR. Ma questa equivale a quella, ch' ei avrebbe acquistata cadendo dall'altezza AV del piano TR; dunque, ec.

337. COROLLARIO III. Altro non essendo qualsivoglia curva AM (*Fig.* 150.) che un poligono d'infiniti lati, i quali sono de' piani diversamente inclinati, ne segue, che la velocità acquistata da un corpo discendendo lungo una curva è uguale a quella, ch' esso avrebbe acquistata, se caduto fosse dall'altezza AV di detta curva.

338. PROPOSIZIONE LVI. *Il tempo, ch' un corpo consuma nell' iscorrere un piano inclinato* AM (Fig. 148.), *è a quello, ch'*

ch' esso impiegherebbe nello scorrere l' altezza AH, *come la lunghezza* AM *del piano inclinato è alla medesima altezza* AH.

Da H io tiro sul piano la perpendicolare HR, ed AR è lo spazio, che'l corpo scorrerebbe sul piano inclinato in un tempo uguale a quello, ch' esso impiegheria nel cadere dall' altezza AH (*N.* 330.): ora, perchè il moto sul piano inclinato è uniformemente accelerato, il tempo speso a scorrere lo spazio AR è a quello impiegato a scorrer lo spazio AM, come $\sqrt{AR}$ a $\sqrt{AM}$; onde il tempo consumato nel cadere dall'altezza AH è parimente al tempo consumato nell'iscorrere la lunghezza AM, come $\sqrt{AR}$ a $\sqrt{AM}$: ma a cagione de' triangoli simili RAH, MAH noi abbiamo $AR . AH :: AH . AM$; dunque $\overline{AR}^2 . \overline{AH}^2 :: AR . AM$, e però $AR . AH :: \sqrt{AR} . \sqrt{AM}$. Così'l tempo impiegato nello scorrer l' altezza AH è a quello della discesa lungo AM, come AR ad AH, o come AH ad AM; e conseguentemente il tempo della discesa lungo AM è a quello della caduta AH, come la lunghezza AM all' altezza AH.

339. COROLLARIO. *Dunque i tempi spesi nell' iscorrer diversi piani inclinati aventi la medesima altezza* AH (Fig. 148.) *sono fra se come le lunghezze di detti piani.*

Poichè, chiamando T il tempo della caduta AH, X quello della discesa lungo'l piano AM, ed x quel della discesa lungo'l piano AN, per rapporto al piano AM avremo $X . T :: AM . AH$; dunque $X \times AH = T \times AM$, e per rapporto al piano AN avremo $x . T :: AN . AH$; il che ci dà $x \times AH = T \times AN$. Onde $X \times AH . x \times AH :: T \times AM . T \times AN$, ovvero $X . x :: AM . AN$; e così in altri casi.

Delle Potenze, che con corde tirano de' Pesi.

340. PROPOSIZIONE LVII. *Se due potenze* A, B, *le quali con delle corde* MC, NC *tirano un peso* P (Fig. 151.), *son' espresse dalle parti* MC, NC *delle lor direzioni, che formano'l parallelogrammo* MENC, *la cui diagonale* CE *presa sopra la direzione del peso esprime la forza di detto peso* P, *le due potenze e'l peso sono in equilibrio; ma se le due potenze non son' espresse dai lati* MC, NC *del parallelogrammo* MENC, *fra lo potenze e'l peso non vi può esser' equilibrio.*

La forza MC, che tira da C in M, e la forza NC, che tira da C in N, compongono la forza CE che tirerebbe da C in E, per-

perchè questa è lor'equivalente: ma la forza CE è uguale e contraria alla forza EC del peso, a cagione che questo peso tira secondo la direzione contraria EC; onde la forza EC è in equilibrio col peso P, e per conseguente le due forze MC, NC, cioè le due potenze A e B sono altresì in equilibrio col peso P.

Ora, se le due potenze A e B non sono espresse dai lati MC, NC del rettangolo, elle lo saranno da linee minori, o maggiori delle due MC, NC, che saran proporzionali, o nò ad MC, NC.

Supponiamole prima espresse dalle rette RC, CS (*Fig.* 152.) minori, ma proporzionali alle due MC, NC: termino 'l parallelogrammo RTSC, il quale sarà simile al parallelogrammo MENC; ed in conseguenza la diagonale CT sarà parimente minore della diagonale EC, e tutte due avranno la stessa direzione. Ora le forze componenti RC, CS agiranno sul peso nello stesso modo della composta TC, che tirerebbe da T in C; e questa essendo minore della forza contraria EC del peso, non potrebbe con detto peso essere in equilibrio; onde nè meno le potenze A e B potrebbon sostenere il peso.

Se per lo contrario le potenze A e B son' espresse dalle rette HC, CL maggiori, ma proporzionali alle due MC, NC, la diagonale XC del loro parallelogrammo HXLC sarà maggiore di EC, ed amendue ancora avranno la stessa direzione; perciò le potenze, agendo sul peso colla forza XC contraria e maggiore della forza EC di esso peso, lo alzeranno, e non vi sarà più equilibrio.

Se le due potenze A, B (*Fig.* 153.) fossero espresse dalle linee RC, SC minori delle due MC, NC senza esser loro proporzionali, allora terminando 'l parallelogrammo RTSG, le forze RC, SC sarebbero equivalenti alla forza TC, che tirerebbe da C in T, vale a dire le due forze RC, SC tanto agirebbero sul peso P, quanto la sola TC, che tirerebbe da C in T. Ora essendo la direzion TC obbliqua alla direzione del peso P, tiro TH perpendicolare sulla direzione del peso, e terminando 'l parallelogrammo THCX, la forza TC è composta della forza CX che tira da C in X, e della CH che tira da C in H: ma nel presente caso la forza CH è minore della forza EC del peso; perciò 'l peso trarrà seco la forza CH, e quanto alla CX niente l' impedirà d'agire; e conseguentemente fra le due potenze e'l peso non vi sarà più equilibrio.

Con simili ragionamanti proveremo sempre, che l' equilibrio

non

non potrebbe sussistere fra le potenze e 'l peso, tanto se le linee RC, SC fossero maggiori ciascuna delle due MC, NC senza esser loro proporzionali, come se l' una fosse maggiore, e l' altra minore.

Che se vogliamo, che le due direzioni AC, BC (*Fig.* 154.) delle potenze A, B sieno sopra una stessa retta, e contrarie l' una all' altra, fra le due potenze e 'l peso P non vi sarà più equilibrio; poichè, se uguali sono ed orizzontali le due forze MC, NC delle potenze, esse saranno fra loro in equilibrio, e in detto tempo il peso P tirando da E in C, e nulla trovando che li resista, non si fermerà, e però non vi sarà più equilibrio. Che se la forza MC è maggiore di NC, la forza MC trarrà seco NC: ma siccome ella non è composta di alcuna forza opposta alla forza EC del peso, così detto peso continuerà sempre ad agire, e l' equilibrio mancherà non solo dalla parte delle due potenze, ma anche da quella del peso.

Se finalmente le due potenze A, B (*Fig.* 155.) tirano con direzioni contrarie MC, NC, che sono sopra una retta obbliqua all' orizzonte, fra le potenze e 'l peso non vi sarà più equilibrio; poichè da' punti M, N conducendo le rette MR, NT perpendicolari alla direzione del peso, e terminando i parallelogrammi rettangoli MRCX, ed NZCT, la forza MC sarà composta della forza RC che tira da C in R, e della CX che tira da C in X, e la forza NC sarà composta della forza CT che tira da C in T, e della CZ che tira da C in Z; e però, se CT equivale a CR, queste due forze saranno in equilibrio, e non potran fare che 'l peso non discenda: nel qual caso le forze CX, CZ, per essere contrarie, saranno altresì uguali ed in equilibrio, mercè che i triangoli simili MRC, CTN, avendo per ipotesi il lato RC uguale al lato CT, saran perfettamente uguali, e s' avrà MR ovvero CX $=$ TN o sia CZ; onde non vi sarà più equilibrio, nulla essendovi che fermi la gravità del peso.

Se la forza RC fosse minore della CT, il moto del peso P sarebbe accresciuto per l' eccesso della forza CT sopra la CR; così 'l peso non saria ritenuto, ed in oltre, essendo la forza CT minore in tal caso della CZ a motivo de' triangoli simili MCX, ZCN, la forza CZ seco necessariamente trarrebbe la forza CX, e però non vi sarebbe più equilibrio nè dalla parte delle potenze, nè da quella del peso.

Lo stesso noi proveremmo, se la forza RC fosse maggiore del-

la CT; poichè, quantunque succeder potesse che l' eccesso della forza RC sopra CT fosse uguale a quella del peso, nel qual caso la forza RC sarebbe in equilibrio col peso, tutta volta la forza CX, che saria allor maggiore della CZ, trarrebbe seco CZ e però non vi sarebbe più equilibrio nè fra le potenze, nè fra'l peso.

341. *Se due potenze* A, B (Fig. 151.) *sono in equilibrio con un peso* P *da esse con corde sostenuto, queste due potenze sono fra loro reciprocamente come i seni degli angoli* ECN, ECM *formati dalle lor direzioni con la direzione* EC *del peso.*

Nel triangolo ENC il lato EN è al lato NC, come il seno dell' angolo ECN a quello dell' angolo CEN, ovvero ECM, che gli è alterno: ma EN = MC; onde la potenza A espressa da MC è alla potenza B espressa da NC, reciprocamente, come il seno dell' angolo ECN, formato dalla direzione BC della potenza B colla direzione EC del peso, è al seno dell' angolo MCE formato dalla direzione AC della potenza A colla direzione EC dello stesso peso.

342. Se dunque dal punto E tirasi ER perpendicolare a BC, ed ES perpendicolare ad AC, la potenza A è alla potenza B, come la perpendicolare ER alla perpendicolare ES; poichè pigliando la retta EC per seno totale, la perpendicolare ER è 'l seno dell' angolo ECB, e la ES quello dell' angolo ECA.

343. *Se due potenze* A, B (Fig. 151.) *sostengono un peso* P *con delle corde, la potenza* A *è al peso* P, *come il seno dell' angolo* BCE *formato dalla direzione dell' altra potenza* B *colla direzione* EC *del peso è al seno dell' angolo* ACB *formato dalle direzioni delle due potenze.*

Nel triangolo ECN, il lato EN, od MC è al lato EC, come il seno dell' angolo ECB a quello dell' angolo ENC, ovvero ACB compimento a due retti dell' angolo ENC; dunque la forza MC, o sia la potenza A è alla forza EC, o al peso P, come il seno dell' angolo ECB a quello dell' angolo MCN, od ACB.

Proveremo nello stesso modo, che la potenza B è al peso, come il seno dell' angolo ECM a quello dell' angolo BCA.

344. Si può così di passaggio far notare, che se due potenze, per grandi che sieno, tirano con delle corde un peso, quantunque picciolissimo, non potranno giammai dette due potenze stender le loro corde in modo, che sieno in retta linea (*Fig.* 154. 155.); perchè in tal caso, come sopra s' è veduto, non vi sarà più equilibrio.

345. Si

345. Si può parimente osservare, che se un peso P è attaccato ad un punto fisso E (*Fig.* 156.), da cui esso pende liberamente, cioè in modo che la sua direzione EP sia all' orizzonte perpendicolare, la più picciola potenza, ch'immaginar si possa, lo può sviare dalla sua direzione; poichè supponiamo, che la forza del peso sia espressa dalla retta EC, e ch' una potenza per picciola che sia spinga 'l peso secondo la direzione orizzontale CR esprimente la forza di detta potenza: da C io alzo la perpendicolare CR, e da R tiro la retta RE, e termino 'l parallelogrammo CRXE. La forza ER, che tira da R in E, è composta della forza CR che tira da R in C, o che spigne da C in R, e della CE che tira da C in E: ma la forza CE, cioè la resistenza del punto fisso E equivale alla forza EC del peso; però essendo queste due forze in equilibrio, nulla impedisce la forza CR d' agire da C fino in R, ov' essa si troverà in equilibrio con la forza RX del peso, e colla ER, che sarà allora la forza resistente del punto E; e lo stesso si proverebbe, se RC fosse all' orizzonte obbliqua.

346. PROBLEMA. *Sostenendo due potenze* A e B (Fig. 157.) *un peso* P *con delle corde* AC, BC, *trovar la parte del peso da ciascuna d' esse sostenuto*.

Descrivo 'l parallelogrammo AEBC, ch'esprime le forze delle potenze, e quella del peso; dal punto C conduco la retta orizzontale TV, e da punti A e B le rette AT, BV perpendicolari all'orizzontale TV, e le rette AS, BR perpendicolari sopra la direzione CE del peso; il che mi dà i triangoli rettangoli ATC, ERB simili ed uguali, a cagione di AC = EB; e però TC = RB ovvero CV, ed AT o pure SC = ER.

La forza AC, che tira da C in A, è composta della forza AS, o TC, che tira da C in T, e della CS, che tira da C in S; e la forza BC, che tira da C in B, è composta della forza CV, che tira da C in V, e della CR, che tira da C in R: ora, essendo la forza TC uguale e contraria alla forza CV, dette due forze sono in equilibrio, e punto non agiscono sopra 'l peso. Dunque non vi sono che le sole forze AT, od ER, e CR, che sostengano il peso; e conseguentemente la parte sostenuta dalla potenza A è espressa da ER, e quella sostenuta dalla potenza B lo è da RC.

Se l'una delle potenze B tira con una direzione orizzontale BC (*Fig.* 158.), l'altra potenza è composta della forza CE,

che tira da C in E, e della CT, che tira da C in T: ma CT essendo uguale e contraria alla forza CB è per conseguente in equilibrio colla potenza B, e per la stessa ragione la forza CE è in equilibrio colla forza EC del peso; onde la potenza A sostiene da se sola il peso P.

Se l'una delle potenze B tira'l peso con una direzione CB al di sotto dell'orizzontale TV (*Fig.* 159.), la forza AC è composta della forza CT, che tira da C in T, e della CS, che tira da C in S; e la forza CB è composta della forza CV, che tira da C in V, e della CR, che tira da C in R: ora la forza CT è uguale alla CV, a cagione de' triangoli rettangoli simili ed uguali ASE, CBV, che ci danno CV $=$ AS $=$ CT; e per conseguente queste due forze, essendo contrarie, si mantengono in equilibrio. Ma a motivo de' triangoli simili ed uguali ASE, CBR noi abbiamo CR $=$ ES; dunque la parte ES della forza CS è in equilibrio colla forza CR, e l'altra CE della stessa forza CS equilibra colla forza EC del peso: così la potenza, ch'agisce sul peso colla forza CS, è uguale alla forza EC di detto peso, e alla RC; cioè non solo questa potenza sostiene'l peso, ma eziandio lo sforzo RC, che l'altra potenza B fa secondo la direzione RC.

347. Quindi noi potremmo agevolmente conchiudere, che due potenze, le quali sostengono un peso con corde e direzioni obblique a quella del peso, sono insieme maggiori dello stesso peso: ma ciò è ancora più facile a provarsi, qualor si rifletta, che queste due potenze debbono sempre esser' espresse dai lati AC, BC d'un parallelogrammo ACBE (*Fig.* 157. 158. 159.), la cui diagonale EC esprime la forza del peso. Ora i due lati AC, CB, ovvero AC, AE d'un parallelogrammo sono insieme maggiori della diagonale; dunque, ec.

Delle Leve.

348. Qualunque barra di ferro, o legno in retta linea appellasi *Leva*, come in altro luogo s'è detto, e per ordinario ella si considera senza veruna gravità.

Vi sono tre spezie di Leve secondo le tre differenti posizioni, in cui possono ritrovarsi la potenza e'l peso, ovvero le due potenze, o i due pesi rispetto al punto, su cui è appoggiata la Leva. Se la potenza A e'l peso P (*Fig.* 160. sono talmente posti, che

che'l punto d' appoggio C sia fra due, la Leva chiamasi *Leva della prima spezie*; se'l peso P (*Fig.* 161.) trovasi fra la potenza A e'l punto d'appoggio C, ella dicesi *Leva della seconda spezie*; e finalmente, se la potenza, A trovasi fra'l peso P(*Fig.*162.) e'l punto d'appoggio C, essa chiamasi *Leva della terza spezie*: nè vi sono altre spezie di Leva retta, perchè non si possono ritrovare più differenti posizioni della potenza e del peso rispetto al punto.

Evvi bene un' altra Leva ACP (*Fig.* 163.), ch'appellasi *Leva curva*, perchè al punto d' appoggio C ella forma un' angolo; tal che la potenza A è ad un braccio AC, e'l peso P all'altro PC.

349. PROPOSIZIONE LVIII. *Se nelle tre Leve delle tre differenti spezie* (Fig. 160. 161. 162.) *la potenza A e 'l peso P agiscono con direzioni perpendicolari alla Leva, ed equilibrano insieme, la potenza è al peso, reciprocamente, come la distanza PC del peso P al punto d' appoggio C è alla distanza AC della potenza A allo stesso punto C.*

Non può la potenza descrivere l'arco AH, quando nel tempo stesso il peso P non descriva l' arco PR: così le velocità della potenza e del peso sono fra loro come gli archi AH; PR descritti nel medesimo tempo, o come i raggi AC, CP proporzionali agli archi AH, PR, a cagione de' settori simili ACH, PCR; onde la forza impiegata dalla potenza è a quella del peso, come $A \times AC$ a $P \times PC$: ma per ipotesi $A \times AC = P \times PC$, poichè le due forze equilibrano; dunque A. P : : PC. AC.

350. Nelle leve della prima e seconda spezie (*Fig.*160. 161.), quanto il punto C è più vicino al peso, tanto più la potenza A, che'l peso sostiene, diventa minore rispetto allo stesso peso; ed in conseguenza utilissime sono queste due macchine per levare con picciole forze pesi considerabili, aggiugnendo alle stesse qualcosa di più di quello richiedesi, acciò sieno co' detti pesi in equilibrio.

Ma quanto alla leva della terza spezie (*Fig.* 162.), la potenza A è sempre maggiore del peso P, poichè PC è sempre maggior di AC; onde questa leva, anzi ch' esser d'ajuto, la potenza aggrava, e però questa tal machina è affatto inutile.

351. Se la potenza e 'l peso tirano con direzioni AE, PH (*Fig.* 164.) parallele fra loro, ma obblique alla leva, o più tosto, se due potenze A e P tiran la leva con direzioni AE, PH fra se parallele, ma alla leva obblique, e che dette due potenze-

tenze equilibrino insieme, supponendo la leva AR fissamente attaccata al punto d'appoggio C, tal che girar possa intorno a detto punto senza tutta volta scorrer da C in A, ovvero da C in P, dico; che queste due potenze saranno ancora fra se, reciprocamente, come le lor braccia della leva, cioè A. P : : CP. PA.

Sopra le direzioni AE, PH piglio le parti AE, PH, le quali sieno tali, che s'abbia AE. PH : : PC. CA, e suppongo che le forze, dalle potenze A e P impiegate tirando la leva, sieno espresse dalle rette AE, PH; dal punto E io tiro ER parallela alla leva, e da A la retta AR alla medesima leva perpendicolare: così la forza AE, che tira da A in E, è composta della forza AR, che tira da A in R, e della forza RE, od EL, che tira da E in L; cioè, se la potenza A tira con una corda AE, ed una direzione espressa da AE, ella farà lo stesso effetto di due forze, l'una delle quali sia tirata con una corda, ed una direzione espressa da AR, e l'altra con una corda ed una direzione espressa da AL.

Facendo la stessa costruzione per rapporto alla potenza P, troveremo, che P, tirando con una corda e direzione uguale a PH, fa lo stesso effetto di due forze, l'una delle quali sia tirata con una corda, ed una direzione espressa da PQ, e l'altra con una corda, ed una direzione espressa da PS: ma i triangoli rettangoli AER, PHR, essendo simili ci danno AE. PH : : AR. PQ, e noi abbiamo AE. PH : : PC. AC; dunque AR. PQ PC. AC, e conseguentemente le forze AR, PQ perpendicolari alla leva equilibrano insieme, perchè son reciprocamente come le lor braccia della leva (*N.* 349.).

Ora le forze AL, PS, che tiran da una stessa banda, e trovano un' ostacolo invincibile al punto d' appoggio C, equilibrano con dett'ostacolo; onde le potenze A e P esser debbono in equilibrio intorno 'l punto fisso C.

352. Lo stesso non avverrebbe, se la leva fosse solitanto appoggiata sul punto C senza esservi fissamente attaccata, e se la potenza e 'l peso tirassero con corde; perchè allora la forza resistente resisterebbe o con una direzione TC perpendicolare alla leva, o con una XC parallela alle direzioni delle potenze. Se resistesse con una direzione TC perpendicolare alla leva, ella resisterebbe con una forza uguale alle due AR, PQ, e per conseguente saria con queste due forze in equilibrio: ma siccome le due AL, PS, che tirano da una stessa banda, non troverebbono

resi-

resistenza dalla parte di detta forza TC, che appoggia semplicemente la leva AP senza esservi in verun modo attaccata, dette due forze spignerebbero la leva verso A, e tosto cesserebbe l' equilibrio.

Che se la forza resistente resistesse con una direzione XC parallela alle direzioni AE, PH delle potenze A, P, ella sarebbe composta della forza XZ, che rispigneria la leva da X in Z, ed equivarrebbe alle due AR, PQ, e della XT, o ZC, che la spignerebbe da Z in C in un verso contrario alle forze AL, PS, supponendo, che ZC entrasse in qualche incavo della leva, o che vi fosse attaccata in modo, che la leva più non potesse scorrere: ma siccome noi ciò non supponiamo, le due forze AL, PS faranno ancora scorrer la leva verso L, e così cesserà l' equilibrio.

353. Nessuno finora ha fatto quest' osservazione, e pur mi pare che meriti qualche riflesso per non ingannarci quando siamo alla pratica.

354. Ciò per altro non avrebbe luogo, se in vece d' un sostegno in C (*Fig.* 165.) supponessimo, ch' una potenza M tirasse C con una corda, ed una direzione MC parallela e contraria alle direzioni AE, PH delle potenze A e P; perchè in tal caso, se la potenza M fosse uguale alle due A e P, e ch' esse fossero tra loro reciprocamente, come PC ad AC, l' equilibrio fra le tre potenze sussisterebbe. Ciò ch' io provo nel seguente modo.

Faccio AE . PH : : PC . AC, e CM = AE + PH; da' punti E, H, M tiro delle rette ER, HQ, MX parallele alla leva, e da' punti A, P, C delle rette AR, PQ, CR alla medesima leva perpendicolari; poi terminando i parallelogrammi ALER, PSHQ, CNMX, la potenza A è composta della forza AR, che tira con una corda da A in R, e della forza AL, che con una corda tira da A in L; e la potenza P della forza PQ, che tira con una corda da P in Q, e della forza PS, che con una corda tira da P in S; finalmente la potenza M è composta della forza, che tira con una corda da C in X, e della CN, che con una corda tira da C in N: ora, simili essendo i triangoli rettangoli AER, PHQ, MCN, ed essendo l' ipotenusa MC del triangolo MCN uguale alla somma dell' ipotenuse AE, PH degli altri due, il lato MN, o CX dello stesso triangolo MCN sarà pure uguale alla somma de' lati omologhi AR, PQ degli altri due; così CX, che tira da C in X, sarà in equilibrio colli

due

due AR, PQ, che tirano con direzioni contrarie, e parimente il lato CN del triangolo CMN equivarrà alla somma degli altri due lati omologhi ER od AL, HQ o PS de' due altri triangoli; perciò la forza CN, che tira da C in N, equilibrerà colle due AL, PS che le son contrarie, ed in conseguenza fra le tre potenze sussisterà l'equilibrio. Quindi la differenza che passa fra questo e 'l precedente caso si è, che quivi la forza MC, tirando con una corda, fa 'l medesimo effetto delle due CX, CN, che tirerebbero con due; là dove nell'anteriore (*Fig.* 164.) la forza resistente XC composta d' XZ, XT non resiste che come XZ, frattanto che la forza XT sopra la leva non agisce, per non esservi cosa, che attachi detta forza alla leva.

355. Se le due Potenze A e P (*Fig.* 166.) tirano amendue con corde, e direzioni, che non sieno parallele, prolungo dette direzioni, finchè si seghino in un punto C: ora, posto ch'esse due potenze sieno espresse da CA, CR, termino 'l parallelogrammo AHRC, e tirando la diagonale CH, che sega la leva AP in O, dico; che se una potenza espressa da CH tira la leva con una corda attaccata in O, e colla direzione OH, sarà detta potenza in equilibrio coll'altre due A, e P. Il che io così provo.

Dal punto C tiro XM parallela alla leva, e CT perpendicolare ad XM; poi terminando intorno ad AC il parallelogrammo rettangolo CXAT, la potenza A, che tira con una corda da A in C, fa lo stesso effetto della forza AX, che tirerebbe con una corda da A in X, giunta alla forza AT, che con una corda tirerebbe da A in T.

Parimente dal punto R abbasso RM perpendicolare ad XM, e terminando 'l parallelogrammo rettangolo RVCM intorno a CR, la forza, che tira da R in C, fa lo stesso effetto delle forze, che tirano da R in M, e da R in V; cioè conducendo PZ parallela ad RM, la potenza, che con una corda tira da P in C, fa 'l medesimo effetto della forza, che con una corda tirerebbe da P in Z e che saria espressa da RM; giunta alla forza, che tirerebbe con una corda da P in O e che saria espressa da RV, o CM.

Finalmente dal punto H io abbasso HN perpendicolare ad XM, e terminando 'l parallelogrammo rettangolo CNHE intorno a CH, la forza è composta delle due CE, e CN; cioè conducendo OY parallela a CE, la potenza, che tireria con una corda da O in H e che verrebbe espressa da CH, faria 'l medesimo effetto

della

della forza, che con una corda tirerebbe da O in Y, e che verria espressa da CE, od HN giunta alla forza, che con una corda tirerebbe da O in L, e che sarebb'espressa da CN.

Ora, mercè i triangoli rettangoli AHL, CRM simili ed uguali, abbiamo RM = HL, e a motivo delle parallele abbiamo altresì AX = LN; dunque RM + AX = HL + LN = HN, cioè le due forze AX, RM sono insieme uguali alla forza HN; e perchè le due prime AX, RM son contrarie ad HN, nè risulta, fra le tre forze non esservi equilibrio.

Ora i triangoli rettangoli simili ed uguali ACT, HSR ci danno AT = SR; ed in conseguenza la forza RV, essendo contraria alla AT, la distrugge colla sua parte RS, e le resta la parte SV, ch'equilibra colla forza CN ad essa uguale e contraria. Così essendo tutte le forze componenti le potenze AC, CR, CH in equilibrio, necessariamente ne segue, esserlo pure le medesime tre potenze.

Lo stesso avverrebbe, se in vece della potenza, che tira da O in H, si mettesse un punto d'appoggio in O, sicchè la leva vi fosse fissamente attaccata senza poter' iscorrere da O in A, ovvero da O in P.

Ma se leva fosse semplicemente appoggiata ad O, allora, quando anche detto punto d'appoggio resistesse giusta la direzione CH della potenza CH, la sua resistenza composta delle forze CE, e CN agirebbe unicamente secondo la forza FO uguale e parallela a CE; ed in conseguenza la forza RV maggiore della sua opposta AT faria scorrer la leva verso A, e più non vi sarebb' equilibrio.

356. Quando s' adopera la leva per sollevar da terra un corpo B (*Fig.* 167.), senza interamente alzarlo, allora la leva è inclinata all'orizzonte; la potenza A, cioè le mani, che s'appoggiano in A, tirano con una direzione perpendicolare AT, e 'l corpo B pesando sulla leva colla direzione RB perpendicolare all' orizzonte produce sulla leva il medesimo effetto della forza RS, od HR, la qual' è perpendicolare; perchè l' altra forza componente RH non è sostenuta dalla leva, ma dal terreno. Perciò, quanto maggiore diventa l'angolo CBT d' inclinazione della leva coll'orizzonte senza tutta volta divenir retto, tanto maggior diventa'l peso, che la stessa potenza può sostenere; poichè, a misura che cresce detto angolo, il lato RS del parallelogrammo RSBH divien minore: così, posto che sotto un'angolo uguale all'angolo

ABT la potenza A sia in equilibrio colla forza RS, l'istessa potenza sotto un'angolo maggiore sarà più forte della forza RS del parallelogrammo RSBC corrispondente a detto angolo, e però, a fine di mantener l'equilibrio, converrebbe accrescer' il peso P.

357. *Nella leva curva, se la potenza* A *e'l peso* P (Fig. 168.) *son perpendicolari sopra le loro braccia della leva, e che vi sia equilibrio, la potenza* A *è al peso* P, *reciprocamente, come'l braccio* CP *al braccio* AC.

Non può la potenza A descrivere l'arco AE, quando 'l peso P non descriva l'arco PH: essendo l'angolo ACP uguale all'angolo ECH, mercè l'inflessibilità della leva, se da detti due angoli togliesi l'angolo comune ACH, il rimanente ECA sarà uguale al rimanente HCP, e 'l settore ECA sarà simile al settore HCP; dunque EA. HP : : AC. CP. Ora, gli archi EA, HP, essendo scorsi in tempi eguali, sono fra se come le velocità di A e P; onde queste velocità sono fra loro come AC, CP, e per conseguente le forze A e P saranno fra se come A × AC, P × PC: ma a cagione dell'equilibrio queste due forze son'uguali; onde A × AC = P × PC, e però A. P : : PC. AC.

358. Se la potenza, o 'l peso P, o amendue insieme son' obbliqui alla leva curva, troveremo i loro rapporti nel seguente modo.

Supponiamo che la potenza A (*Fig. 169.*) tiri giusta la direzione AX, e 'l peso P secondo la direzione PT, e che 'l punto d'appoggio sia fissamente attaccato alla leva, in modo che senza scorrer' possa girare intorno ad esso punto. In A e P alzo le rette AM, PQ perpendicolari alle braccia AC, CP, e faccio AM. PQ : : PC. CA; da M tiro MX parallela ad AC e segante in X la direzione AX, e termino 'l rettangolo AMXZ: così pure dal punto Q tiro QT parallela a PC, e compiendo 'l parallelogrammo rettangolo PQTV, dico, che A è a P, come la diagonale AX alla diagonale PT; poichè la forza AX composta di AM, che tira da A in M, e di AZ, che tira da A in Z, non può far muovere la leva che giusta PQ, per essere la resistenza del punto C in equilibrio con PV: ma le forze MA, PQ equilibrano, perchè sono fra se reciprocamente come le lor braccia della leva; onde anche le forze AX, PT, son pure in equilibrio, e così dell'altre.

359. PROBLEMA. *Data la gravità della leva* AB (Fig. 170.), *e'l punto*

punto C, intorno a cui con direzioni perpendicolari alla leva sarebbero in equilibrio la potenza e'l peso, se la leva non pesasse, conoscere il punto H, *intorno cui dee esservi equilibrio, avuta considerazione alla gravità della leva.*

Se supponiamo la leva AB egualmente grossa in ogni sua parte, e composta di parti omogenee, il suo centro di gravità è sul punto di mezzo M: così noi possiamo considerar detta leva pesante AB come un peso attaccato al punto M d'una leva AB senza gravità, e la potenza A e'l peso B quasi componenti un sol peso posto in C, ch'è il lor centro d'equilibrio. Però segando la distanza MC in due parti CH, HM reciproche alla gravità della leva posta in M, e al peso A equivalente alla potenza A e al peso B, il punto H sarà 'l centro d'equilibrio cercato.

360. Quindi facilmente si scorge, che se 'l centro di gravità M della leva è dalla parte della potenza A rispetto al punto d'appoggio C, detta potenza è soccorsa dalla gravità della leva, e dee alzare il peso; e all'incontro, se'l centro di gravità M della leva è dalla banda del peso, il medesimo peso trarrà seco la potenza. E in amendue i casi la gravità della leva, che si trascurasse, impedirebbe che non vi fosse equilibrio.

361. PROBLEMA. *Data la gravità d'una leva* AB (Fig. 170.), *le distanze* AC, CB *dal centro* C *di moto all'estremità* A, B *della leva, e'l peso* B *attaccato all'ostremità* B, *conoscer la potenza* A *d'applicarsi all'altra estremità per fare che vi sia equilibrio, avuta considerazione alla gravità della leva.*

Chiamo P la gravità della leva; e supponendo 'l centro di gravità M della leva sul braccio CA, cerco la parte del peso B, ch'esser potrebbe in equilibrio intorno C colla gravità P riunita in M, facendo CB. MC :: P. $\frac{MC \times P}{CB}$: così $\frac{MC \times B}{CB}$ è la parte del peso, ch'equilibrerebbe colla gravità, e per conseguente la potenza posta in A dee equilibrare col restante del peso B, e questo residuo è $B - \frac{MC \times P}{CB}$, ovvero $\frac{CB \times B - MC \times P}{CB}$. Però faccio CA . CB :: $\frac{CB \times B - MC \times P}{CB}$. $\frac{CB \times B - MC \times P}{CA}$; e questo quarto termine esprime la potenza, o'l peso da mettersi in A, per far'equilibrio con B intorno al punto C.

Sia AB = 20, AC = 12, BC = 8, B = 60 libbre, e la gravità P = 5; dunque AM = 10, ed MC = 2: così nella

prima proporzione avremo $8 . 2 :: 5 . \frac{10}{8}$, cioè la gravità della leva sarà in equilibrio colli $\frac{10}{8}$, o $\frac{5}{4}$ d'una libbra; perciò pesando B 60 libbre, la potenza A, o 'l peso che si dovrebbe metter' in A, non può sostenere più di 60 libbre $- \frac{5}{4}$, cioè $58\frac{3}{4}$. E nella seconda avremo $12 : 8 :: 58\frac{3}{4} . \frac{8 \times 58\frac{3}{4}}{12}$; e quest'ultimo termine $\frac{8 \times 58\frac{3}{4}}{12} = \frac{2 \times 58\frac{3}{4}}{3} = \frac{117\frac{1}{2}}{3} = \frac{235}{6} = 39\frac{1}{6}$ ci fa vedere, ch'una potenza equivalente a 39 libbre $\frac{1}{6}$ sarebbe in equilibrio col peso B.

Se 'l centro di gravità M della leva è dal lato B (*Fig.* 171.), supponendo $AB = 20$, $AC = 8$, $BC = 12$, il peso $B = 60$, e la gravità della leva $= 5$, il momento, o la forza del peso B rispetto al centro di moto sarà $B \times CB = 60 \times 12 = 720$, e quello della gravità P sarà $P \times MC = 5 \times 2 = 10$. Onde i due momenti pres' insieme sono 730, e debbono equivalere al momento della potenza A, ch'è $A \times AC = A \times 8$; però $730 = A \times 8$, e $\frac{730}{8} = A$, ovvero $91\frac{1}{4} = A$, cioè la forza A dovrebbe equivalere ad un peso di 91 libbra $\frac{1}{4}$ per equilibrare con B, e colla gravità P.

362. Se la potenza, o 'l peso, o amendue avessero delle direzioni, ch' alla leva non fossero perpendicolari, troveremmo pure lo stesso. Supponiamo, p. e. ch' una potenza A (*Fig.* 172.) tiri giusta una direzione AF, e che sia espressa dalla retta AF; da F conduco FT parallela alla leva, e dal punto A tiro AT perpendicolare alla stessa leva; e terminando 'l parallelogrammo ATFL, la potenza AF è composta della forza AT, che tira da A in T, e della forza AL, che tirando da A in L è in equilibrio colla resistenza del punto fisso C, intorno a cui gira la leva; perciò la potenza AF fa 'l medesimo effetto rispetto 'l peso, che convien mettere in B, della potenza CT, che sarebbe perpendicolare alla leva. Ora, nel triangolo rettangolo AFT, di cui son dati l'angolo AFT, od FAL, e la base AF, si può facilmente conoscere il lato AT; però, se vogliamo conoscere 'l peso da mettersi in B, perchè la potenza AT e 'l peso sieno in equilibrio avuta considerazione alla gravità della leva, s'opererà, come sopra s'è insegnato.

363 Possiamo alla leva della seconda specie applicare quanto ne' precedenti articoli s'è detto rapporto a quella della prima.

364. Per quello spetta alla leva curva, le cui due braccia sono

sono in un piano perpendicolare all' orizzonte, supponiamo, che 'l braccio CB (*Fig.* 173.) sia orizzontale; che la potenza A sia perpendicolare in A, e che si voglia conoscer' il peso da mettersi in B per far'equilibrio, avuta considerazione alla gravità della leva. Dal mezzo M del braccio CA tirisi la retta MN al mezzo N dell' altro braccio CB; dividasi CB in due parti MR, RN reciproche alle due braccia, cioè si faccia AC . CB : : NR . RM, e 'l punto R sarà 'l centro di gravità della leva. Onde da R abbassando la verticale RS, che sega 'l braccio CB in S, può la gravità della leva esser considerata come un peso attaccato al punto S; e quindi noi cercheremo, come sopra, la parte della potenza A, con cui può la gravità della leva esser' in equilibrio intorno al punto C, ed in seguito 'l peso B atto ad equilibrare col restante della potenza A; e così negli altri casi.

365. PROBLEMA. *Costruire una Bilancia Romana.*

Prendasi una lunga leva AE (*Fig.* 174.) di legno, o ferro, che sia dovunque d'egual densità; sopra questa piglisi per centro di moto un punto C in poca distanza dall' una dell' estremità A; al di sopra di C si ponga perpendicolarmente una linguetta, o lama di ferro, che passi nella stadera CD fissamente attaccata al centro C di moto; all' estremità A s' attacchi un' appiccagnolo, od uncino, da cui penda una lance sospesa all' uncino con quattro corde, sicchè l' uncino e la lance sieno in equilibrio coll' altro braccio CE della leva, il che si conosce sospendendo tutta la macchina per la stadera; poichè se la linguetta non esce nè dall' una, nè dall' altra parte fuori della stadera, e che cessi 'l moto, vi sarà equilibrio. Prendasi finalmente la distanza AC, e portandola sul braccio CE da C in 1, da 1 in 2, e così successivamente, la bilancia è formata.

Ora per servirsene ponesi nella lance la merce che si vuol pesare, e pigliasi un peso d'una libbra, il quale si fa scorrere lungo 'l braccio CE, finchè la merce e 'l peso equilibrino insieme. Se quando v'è equilibrio il peso P è sul punto 1 del braccio CE, la merce peserà una libbra, cioè quanto 'l peso, a motivo delle distanze uguali AC, C1. Se è sopra 2, ella peserà due libbre, poich' essa sarà al peso P, reciprocamente, come la distanza C2 del peso al centro di moto è alla distanza AE dello stesso centro alla mercanzia; e così negli altri casi.

Quando la merce che si vuol pesare è d'una gravità considerabile, in vece del peso P d'una libbra se ne pone un maggiore

p. e.

p. e. di 100, ed allora se l' equilibrio trovasi al punto 1, la mercanzia peserà 100 libbre; se al punto 2, ne peserà 200, e così a mano a mano.

366. Siccom' egli è impossibile di rinvenir leve in tutte le loro parti perfettamente omogenee, così si troveranno le divisioni 1 . 2 . 3, ec. del braccio CE assai più giuste, ponendo successivamente nella lance un peso d'una, di due, di tre libbre, ec. e cercando per ciascuno d'essi 'l punto, ove si dee metter' il peso P per far'equilibrio; ciò che trovasi, facendo scorrer detto peso lungo CE, finchè s'abbia l'equilibrio cercato.

In tal modo costruiscono gli Artefici le Bilancie Romane: ma siccom' egli è facile, che commettano delle negligenze, così credo sia meglio servirsi della Bilancia ordinaria, di cui ora parleremo.

367. PROPOSIZIONE LIX. *Se'l centro* C *di moto* (Fig. 175.) *è sul mezzo d'una leva* AB, *e ch' all' estremità* A, B *si sospendano due pesi eguali* P, Q, *i quali conseguentemente saranno in equilibrio, io dico, ch' in qualunque posizione orizzontale, od obbliqua si metta la leva, sempre sussisterà l'equilibrio, e la leva resterà in quiete.*

Questa proposizione è per se evidente, quando la leva è nella posizione orizzontale AB, a cagione dell'egualità de' pesi, e delle braccia AC, CB; e non è men chiara, quando ella trovasi nella posizione obbliqua FH. Poichè supponendo, che'l peso p sia espresso dalla retta Fp, che tira da F in p, e intorno Fp facendo 'l parallelogrammo rettangolo $FVpT$, il peso p farà 'l medesimo effetto ch' un peso espresso da FT, e che tirerebbe secondo la direzione TF, giunto ad un'altro espresso da FV, e che tireria giusta la direzione FV. Per la stessa ragione il peso Q fa lo stesso effetto ch' un peso espresso da HM, e che tirerebbe secondo la direzione HM, unito ad un'altro espresso da HN, e che tireria giusta la direzione HN. Ora uguali essendo le diagonali Fp, Hq, perch' esprimono pesi uguali, e 'l angolo pFV equivalendo all'angolo qHN, i triangoli rettangoli FVp, HNq son' uguali; onde Vp, od $FT = Nq$, od HM: così, a motivo dell'egualità delle braccia FC, CH, i pesi eguali FT, HM sono in equilibrio, e le forze FV, HN od i pesi, essendo ritenuti dalla resistenza del punto fisso, equilibran pure con detta resistenza, e per conseguente la leva dee rimaner'in quiete.

368. PROPOSIZIONE LX. *Ma se'l centro di moto* C (Fig. 176.) *è al*

è al di sopra del mezzo H *della leva* AC, *e che dopo aver' alle due estremità* A, B *attaccati due pesi eguali* P, Q *si collochi una leva in una situazione obbliqua* EF, *io dico, ch' essa si muoverà, fintanto che di nuovo si sia posta in una posizione orizzontale* AB, *ove i due corpi si troveranno in equilibrio*.

Acciò la leva possa esser messa nella posizione obbliqua EF, bisogna necessariamente, che'l suo centro di gravità ascenda col descrivere l'arco HR: ora questo centro, essendo in R, non è più sostenuto giusta la sua direzion verticale; dunque ei dee discendere, finchè direttamente si trovi sotto'l punto fisso C, che l'impedirà di discender più basso, e allora l' egualità de' pesi e delle due braccia stabilirà l' equilibrio.

369. PROPOSIZIONE LXI. *Se finalmente'l centro* C *di moto* (Fig. 177.) *è al di sotto del mezzo* M *della leva* AC, *e che dopo aver posti due pesi eguali all' estremità* A, B *della leva ella si ponga in una posizione obbliqua* EF, *dico, che la leva non cesserà di discendere, finchè sia giunta alla posizione orizzontale* HS *parallela alla posizione* AB.

Non può la leva esser messa nella posizione EF, quando'l suo centro di gravità M non descriva l' arco MR: ma questo centro, essendo in R, non ritrova da sostenersi secondo la sua direzion verticale; dunque ei dee discendere, finchè direttamente trovisi sotto'l punto d' appoggio C, che l'impedirà di discender più basso, e allora fra i due pesi vi sarà equilibrio.

370. Altro non è la Bilancia ordinaria (*Fig.* 178.) ch' una leva AB, il cui centro di moto è un pò al di sopra del punto M di mezzo. Alle due estremità di essa si sospendono due lanci eguali C, E, ch' equilibrino insieme; poi, quando si vuol pesare qualche merce, ella ponesi nell'una delle lanci, e nell' altra mettonsi de' pesi noti, tal che facciano equilibrio colla merce: così, se'l peso che fa equilibrio è di due libbre, anche la merce ne pesa due, ec.

371. La Bilancia ordinaria inganna, quando un braccio è più lungo dell'altro; e allora la lance, ch' è all' estremità del più lungo, non pesa quanto l' altra, perchè altrimente le due lanci non sarebbero in equilibrio, e quindi si potrebbe facilmente scoprir l'inganno. Queglino, ch'adoperan tali Bilancie, metton sempre la merce da vendere dalla banda del braccio più lungo, perchè faccia equilibrio con un peso maggior di essa; e quando comprano, la metton dalla parte del braccio

più

più corto, perchè faccia equilibrio con un peſo minore; e così eſſi ingannan ſempre tanto facendo i compratori come i venditori.

372. Ora per non reſtar deluſi da coſtoro, dopo aver poſto la mercanzia in una lance, ed aver trovato il peſo, che con eſsa equilibra nell'altra, convien traſportar la merce nella lance del peſo, e 'l peſo in quello della merce; e così, ſe la Bilancia non è giuſta, l' equilibrio ſarà tolto.

373. Per conoſcere il vero peſo d'una merce peſata in una Bilancia malizioſamente fatta, pongo nella lance C (*Fig.* 179.) la mercanzia, ch'io chiamo m, e nella E un peſo p, che colla ſteſsa equilibri; poſcia io traſporto in E la merce, ed in C metto un'altro peſo q, che con eſsa faccia equilibrio; moltiplico p per q, ed eſtraendo la radice quadra dal prodotto pq, ella ſarà 'l vero peſo della mercanzia. Poichè, quando la merce è in C, noi abbiamo BM . AM : : $m . p$, e quando ella è in E, ſi ha BM. AM : : $q . m$; onde $q . m : : m . p$, e $pq = mm$, ed $m = \sqrt{qp}$.

Sia $p = 9$, $q = 10$; dunque $qp = 90$, e $\sqrt{pq} = \sqrt{90} = 9\frac{48}{100} = 9\frac{12}{25}$: così la mercanzia poſta in C in vece di 9 libbre ne peſa $9\frac{12}{25}$, ed in conſeguenza 'l compratore ha guadagnato ſopra la ſua compra $\frac{12}{25}$ d'una libbra, poſto ch' abbia meſso la merce nella lance C; ma ſe nella vendita 'l Mercatante aveſse voluto ingannarlo, l' avrebbe meſsa nella lance E, e così avria fatto equilibrio con $q = 10$, e per conſeguente ſul peſo egli avrebbe guadagnato $\frac{10}{25}$ perocchè la mercanzia non avria realmente peſato che $9\frac{12}{25}$, in vece di 10.

Quindi egli è facile a conoſcer'il rapporto delle due braccia AM, MB; imperocchè trovandoſi la mercanzia $9\frac{12}{25}$, la qual'è in C, in equilibrio con $p = 9$, abbiamo MB. AM : : $9\frac{12}{25} . 9$.

Della Ruota nel ſuo Aſſe.

374. *La Ruota nel ſuo Aſſe* è una Ruota, i cui raggi ſon fiſſamente attaccati ad un cilindro, ch'appellaſi aſse, avente, alle ſue due eſtremità due pezzi di ferro, che s' incaſtrano in due perni, o ſoſtegni, ſu cui girano inſieme il cilindro e la ruota; ed è queſta Machina rappreſentata dalla Figura 180. Il peſo d'alzarſi è con una corda attaccato all' aſſe, e la potenza alla circonferenza della Ruota.

375. PROPOSIZIONE LXII. *Se una potenza* A (Fig. 181.) *che*

che tira con una direzione AH *tangente alla ruota, tiene in equilibrio un peso* P, *la potenza è al peso come il raggio* CE *dell' Asse al raggio* AC *della ruota.*

Se'l raggio AC della Ruota, a cui è perpendicolare la potenza A, è posto in diritto col raggio CE dell'asse, a cui è perpendicolare la direzione del peso, si può considerar la retta AE come una leva, il cui centro di moto sia C: così nel caso dell' equilibrio fra la potenza e'l peso abbiamo A. P : : CE. AC.

Se la potenza tira con una direzione BX perpendicolare al raggio BC, che non è posto in diritto col raggio CE, a cui'l peso è perpendicolare, consideremo le rette BC, CE come le braccia d'una leva curva, a cui la potenza e'l peso sieno perpendicolari; ed in conseguenza avremo ancora A. P : : CE. BC.

376. Agevol cosa sia, se la potenza non tira con una direzione tangente alla Ruota, l'applicare a questa Macchina ciò ch'abbiam detto di quelle leve, a cui la potenza è obbliqua.

377. Siccome, quando si volessero col mezzo di quest' Istrumento alzar pesi assai grandi, converria accrescer'oltre modo il raggio della Ruota, la qual cosa riuscirebbe troppo incomoda, così in tal caso s'adoperano le Ruote dentate, delle quali ora ragioneremo.

Delle Ruote dentate.

378. Le Ruote dentate differiscono dalla Ruota nel suo asse in ciò che le circonferenze delle stesse e quelle de'loro assi han de'denti, dove la Ruota nel suo asse non ne ha. D'ordinario se ne metton molte, come vedesi (*Fig.* 182.) : la prima, a cui attaccasi la potenza, non ha denti alla sua circonferenza, ma all'asse; quelle, che sono fra la prima e l'ultima, hanno de'denti alle circonferenze di esse e de'loro assi; e l'ultima, al di cui asse è attaccato il peso, ha il detto suo asse spoglio di denti. Mentre la prima Ruota gira da B verso A, i denti del suo asse C fan girar la seconda da F verso E, e quei dell' asse G della seconda fanno volger la terza da L verso I: così, se questa è l'ultima, la corda del peso P attaccato all'asse O s'avvolge intorno a detto asse, e'l peso ascende.

379. PROPOSIZIONE LXIII. *Se una potenza* A *perpendicolare al raggio* AC *della prima Ruota equilibra col peso* P *attaccato all' asse dell'ultima, la potenza e'l peso sono in ragion com-*

posta delle ragioni de' raggi degli assi ai raggi delle Ruote; cioè la potenza è al peso, come il prodotto de' raggi degli assi moltiplicati insieme è a quello de' raggi delle Ruote.

Supponiamo prima, che non vi sia che la Ruota, a cui è attaccato il peso; la potenza che tirerebbe da L in X perpendicolarmente al raggio LO della ruota, e che terrebbe 'l peso in equilibrio, saria a detto peso, come il raggio OR dell'asse è al raggio LO della Ruota; poichè i due raggi OR, LO formano una leva curva, il cui centro di moto si è 'l punto O. Così noi avremmo $LO . OR :: P . \frac{P \times OR}{LO}$; e questo quarto termine sarebbe l'espressione della potenza posta in L.

Ora supponiamo, che vi sia una seconda Ruota, e ch'una potenza, la quale tiri da F in Z perpendicolarmente al raggio FG di essa Ruota, equilibri col peso, è manifesto, che i denti dell'asse G di detta Ruota debbono fare il medesimo effetto sopra la Ruota, che sostiene 'l peso, cui farebbe la potenza $\frac{P \times OR}{LO}$. Così la potenza posta in F, equilibrando col peso P, sarebbe altresì in equilibrio colla potenza $\frac{P \times OR}{LO}$, che saria in L; ed in conseguenza, a motivo della leva FL, il cui centro di moto è 'l punto G, avremmo $FG . LG :: \frac{P \times OR}{LO} . \frac{P \times OR \times LG}{LO \times FG}$, e questo quarto termine esprimeria la potenza posta in F, che sarebbe col peso in equilibrio.

Mettendo parimente una terza Ruota, ed una potenza che tiri da A in V perpendicolarmente al raggio AC, e che sia in equilibrio, proveremo ancora, che questa potenza equilibrerebbe colla potenza $\frac{P \times OR \times FG}{LO \times FG}$, che saria in F; perciò, a cagione della leva AF, il cui centro di moto è in C, avremo $AC . CF :: \frac{P \times OR \times LG}{LO \times FG} . \frac{P \times OR \times LG \times CF}{LO \times FG \times AC}$, e questo quarto termine sarà l'espressione della potenza posta in A. Così la potenza posta in A è al peso P, come $\frac{P \times OR \times LG \times CF}{LO \times FG \times AC}$ a P, ovvero come $P \times OR \times LG \times CP$ a $P \times LO \times FG \times AC$, o finalmente come $OR \times LG \times CF$ ad $LO \times FG \times AC$; cioè, come

come 'l prodotto dei raggi OR, LG, CF degli affi è a quello de' raggi LO, FG, AC delle Ruote.

Delle Carrucole, o Girelle.

380. PROPOSIZIONE LXIV. *Se una potenza* A *ed un peso* P (Fig. 183.) *equilibrano intorno ad una Girella, la potenza e'l peso son' uguali.*

Se le direzioni BA, CP son parallele, esse toccheranno la circonferenza della girella all'estremità B, C del diametro BC: ora, essendo 'l centro D il punto fisso della girella, la potenza e 'l peso fanno 'l medesimo effetto, che se si fossero attaccati ai termini B, C della leva BC; e conseguentemente il momento, o la forza della potenza A si è $A \times BD$, e 'l momento del peso si è $P \times CD$: ma per ipotesi $A \times BD = P \times CD$, poichè la potenza e 'l peso sono in equilibrio; onde A . P : : CD . BD, e però $A = P$ a motivo di $CD = BD$.

Se la potenza tira colla direzione tangente EF della girella, ma non parallela alla direzione CP del peso, da E conduco la retta ED al centro della girella, ed ho una leva EDC, le cui braccia ED, DC son' uguali; così 'l momento di A si è $A \times ED$, e quello del peso è $P \times DC$: ma per ipotesi $A \times ED = P \times DC$; dunque A . P : : DC . EC, e però $A = P$.

381. Onde la girella niun beneficio apporta dalla banda della potenza, se pur s'eccettua che col mezzo di essa si può cangiar la direzione della potenza e renderla più comoda. P. e. affin di sostenere il peso P senza girella, dovrebbe la potenza tirar questo peso colla direzion CR opposta alla direzione CP del peso; là dove mediante la girella essa può sostenerlo colla direzione BA, ch'è senza confronto men faticosa, e così in altri casi.

382. PROPOSIZIONE LXV. *Se un peso* P (Fig. 184.) *sospeso al centro* E *d'una girella equilibra con una potenza* A, *che tira con una direzione* AB *tangente alla girella, mediante una corda* ABVCR *fissamente attaccata al punto* R, *la potenza è al peso come* 1 *a* 2.

Supponiamo, che 'l diametro BC della girella sia nella posizione HI, e ch'in conseguenza il centro E sia in V; non potrà questo centro ascendere da V in E, quando la potenza e 'l peso non iscorrano ciascuno uno spazio uguale ad VE: ora, giunto che sia 'l centro in E, la corda RI si sarà raccorciata della quan-

tità CI = VE, che sarà passata dalla banda della potenza; onde questa potenza avrà scorso un'altro spazio uguale ad VE, e per conseguente 2VE, mentre il peso non avrà scorso che VE: ma gli spazj 2VE ed VE scorsi nel medesimo tempo dalla potenza e dal peso dinotano le loro velocità, e per ipotesi i momenti della potenza e del peso son'uguali, perchè v'è equilibrio; onde A × 2VE = P × VE, e però A . P : : VE . 2VE : : 1 . 2.

383. Può avvenire, ch'una stessa potenza sia ad un medesimo peso, come 1 a 1, 1 a 2, 1 a 4, 1 ad 8, e così successivamente, secondo la progressione 1 . 2 . 4 . 8 . 16, ec. disponendo le girelle O, E, C, ec. (*Fig.* 185.) in modo, che le loro corde sieno attaccate a' punti fissi H, M, N, e che la corda HRSZA passi sopra una girella B, acciò la potenza tiri giusta la direzione FA.

Perchè, se non vi fosse che la girella B, e che la potenza A sostenesse il peso attaccato in S, la potenza e'l peso sarebbero in equilibrio, e conseguentemente s'avrebbe A . P : : 1 . 1. Ma se'l peso è sospeso al centro O della girella O, allora, a cagione della leva SR, le cui braccia SO, OR son'uguali, la potenza e'l punto fisso H non sosterrebbero ciascuno che la metà del peso; e però s'avrebbe A . P : : 1 . 2. Parimente, se'l peso fosse attaccato al centro E della girella E, le corde MT ed OX sosterrebbero ciascuna la metà del peso: ma essendo questa metà sostenuta dal punto fisso H e dalla potenza A, la potenza non ne sosterria che la metà, o'l quarto del peso, e però s'avrebbe A . P : : 1 . 4. Che se'l peso si sospendesse al centro C della girella C, la corda NV ne sosterrebbe una metà, e la corda EL ne sosterria l'altra: ora, essendo questa metà sostenuta dalle corde MT, OX, è manifesto, che OX non ne sosterrebbe pure che la metà, cioè 'l quarto del peso, e ch'essendo questo quarto sostenuto dal punto fisso H e dalla potenza A, non sosterrebbe questa che la metà di detto quarto, cioè l'ottavo del peso; quindi A . P : : 1 . 8, e così a mano a mano.

384. Sieno più girelle A, B, C, D (*Fig.* 186.) poste in linea orizzontale, e in egual distanza l'une dall'altre; ne siano altrettante di mobili M, N, X, Z disposte in modo, ch'una corda attaccata ad un punto fisso T passi successivamente sotto le girelle mobili, e sopra le fisse, finchè passata sopra la prima fissa A, una potenza H che tira questa corda equilibri co' pesi

eguali

eguali P, Q, R, S attaccati a'centri M, N, X, Z delle girelle mobili, e dico, che questa potenza equivalerà alla metà dell' uno di essi pesi; il che io così provo.

Se la corda *ab* fosse ritenuta da un punto fisso *b*, la potenza H sosterrebbe la metà del peso P, e 'l punto *b* l'altra metà: così pure, se le corde *dc*, *fm* della girella N fossero sostenute dai punti fissi *c*, *m*, cadaun di loro sosterria la metà del peso Q, e così in altri casi: ma le metà de'pesi P, e Q sono in equilibrio intorno alla girella B; ond'essa fa 'l medesimo effetto de' due punti fissi *b*, *c*, e dee in conseguenza sostenere le metà di P, e Q. Proveremo in somigliante guisa, che la girella C sostiene le metà de' pesi Q, ed R; che la girella D sostiene le metà de' pesi R, ed S, e finalmente che 'l punto fisso T sostiene l' altra metà del peso S; dunque, perchè la potenza H non sostiene che la metà di P, abbiamo $H = \frac{1}{2}P$.

385. Ora, se supponiamo che le girelle mobili sieno fissamente attaccate ad un pezzo di legno FL (*Fig.* 187.), e ch'in vece de' quattro pesi uguali attaccati ai centri delle girelle mobili dal mezzo O di FL sospendasi un peso Y uguale alla somma dei quattro, dico; che la potenza H, la qual tiene questo peso in equilibrio, è al peso, come l'unità al doppio del numero delle girelle mobili, o come l'unità al numero dei fili di corda tirati dal peso. Poichè 'l peso Y, essendo attaccato al centro di gravità di FL delle girelle mobili, fa 'l medesimo effetto dei quattro pesi uguali, ch'erano attaccati in egual distanza dall' una e dall'altra parte di detto centro: ma nella supposizione dei quattro pesi ad ogni girella mobile abbiam ritrovato esser la potenza uguale alla metà dell' uno di essi; onde la potenza era ai quattro pesi, come 1 ad 8, cioè come 1 al numero 8 doppio del numero delle girelle mobili, o come l'unità al numero 8 de' fili di corda tirati dalle stesse girelle mobili. Così 'l peso Y essendo uguale ai quattro, e facendo 'l medesimo effetto, abbiamo $A . Y :: 1 . 8$.

386. Quando ad un medesimo pezzo di legno attaccansi fissamente molte girelle, la macchina, che ne vien formata, appellasi *Taglia*.

387. Sieno due, o più girelle A, B (*Fig.* 188.) fissamente attaccate a TR, ed altrettante C, D similmente attaccate ad VL avente alla sua estremità V un peso P sospeso, ed una corda attaccata all' uncino R di TR passi alternatamente sotto le girelle inferiori D, C e sotto le superiori B, A, tal che una potenza H

tenga

tenga in equilibrio il peso P, dico; che questa potenza è al peso, come l'unità al doppio del numero delle girelle inferiori D, C, o come l'unità al numero de' fili di corda tirati dal peso.
Supponendo che 'l centro *c* della girella C sia in V, e ch' in conseguenza il suo diametro MN sia in XZ, non può questo centro ascendere da V in C, quando la corda, che passa per detta girella, non si raccorci delle due parti eguali MV, NZ; e dalla disposizione di questa Macchina chiaro si scorge, che le corde, le quali passano per la girella D, si faran raccorciate ciascuna egualmente, dopo giunto il centro V in C: così queste quattro parti uguali di corda saran passate dalla parte della potenza H, è conseguentemente questa potenza avrà scorso quattro spazj eguali a CV, mentre il peso P non si sarà alzato che dell'altezza VC. Ora gli spazj scorsi in tempi uguali indicano le velocità; onde $H \times 4CV$ sarà il momento della potenza, e $P \times CV$ quello del peso: ma per ipotesi questi momenti son' uguali; dunque $H \times 4CV = P \times CV$; e però H. P : : CV. 4CV, od 1. 4, cioè la potenza è al peso, come l'unità al numero 4 doppio del numero delle girelle inferiori, o come l'unità allo stesso 4 numero delle corde tirate dal peso.
388. Se in vece di far passare la corda, che la potenza tira, per la prima girella superiore, si facesse passar sotto l'ultima inferior C (*Fig.* 189.), la potenza H sarebbe al peso, come 1 al numero di tutte le corde; poichè, mentre 'l centro C ascenderebbe da V in C, le corde, che passano per la girella C, si raccorcierebbero di due parti MX, NZ uguali ad VC, e d'altrettanto raccorcierebbesi ciascuna delle corde, che passano per la girella D, non meno che la corda attaccata all' uncino L. Perciò dalla banda della potenza passerebbero cinque parti di corda uguali ciascheduna a CV, e per conseguente lo spazio scorso dalla potenza essendo allo spazio VC, il cui peso si sarebbe alzato, come 5 ad 1, $H \times 5CV$ sarebbe il momento della potenza, e $P \times CV$ quello del peso; e a cagione dell' equilibrio noi avremmo $H \times 5CV = P \times CV$, Onde H. P : : CV. 5CV, od 1. 5; il che dimostra, esser questa disposizione più favorevole alla potenza che quella della Figura 188, avendosi veduto, che in quella la potenza sarebbe al peso, come 1 a 4.
389. Se si giugnessero insieme la disposizione della Figura 188 e quella della 189, e che si formasse una sola Macchina (*Fig.* 190.), guadagnerebbesi molto più dalla banda della potenza, Imperocchè,
se

ſe detta potenza foſſe in S, ella ſarebbe al peſo P come 1 a 5, per eſſervi nella diſpoſizione CDBA cinque corde tirate dalle due potenze inferiori C, D; così queſta potenza, eſſendo dall'altra diſpoſizione RXTV ſoſtenuta, non agiſce ſopra detta diſpoſizione che come un peſo, il quale ſarebbe la quinta parte di P: ma la potenza H è al peſo S come 1 a 4, poichè vi ſono quattro corde tirate dalle due girelle inferiori R, X; onde la potenza H non è che la quarta parte della potenza S, e ſiccome queſta non è che la quinta del peſo P, così ne ſegue, che la potenza H non ſarebbe che la venteſima parte del peſo P, poichè 'l quarto del quinto è un venteſimo. Nè altro ſono M, ed N che due girelle fiſſe, le quali ſervono ad agevolar l'uſo della Macchina.

390. Se alla diſpoſizione della Figura 188 giugneſi lo sforzo d'una leva mediante una capra, ſi guadagnerà moltiſſimo dalla banda della potenza. Per capra io intendo un'iſtromento compoſto di tre piedi AB, BC, CD (*Fig.* 193.), i quali uniſconſi ad un medeſimo vertice B, a cui ſono attaccate delle taglie giuſta la diſpoſizione della Figura 188; la corda, che paſſa per la girella ſuperiore, viene ad avvolgerſi ad un'aſſe MN attaccato ai due piedi BC, BD, che per tal motivo formano due piccioli angoli al di ſopra di M ed N; e nell'aſſe vi ſono due, o più pertugi, per cui noi facciam paſſar delle leve come HR, col mezzo delle quali una, o più potenze fanno girar l'aſſe ed alzano il peſo attaccato alla taglia ſuperiore. Ora, poſto che l'inferiore non abbia che due girelle, la potenza, che tirerebbe in H ſenza 'l ſoccorſo dell'aſſe MN, ſaria al peſo, come 1 a 4; però ella farebbe il medeſimo effetto d'un peſo, che non ſaria ſe non ſe 'l quarto di P: ma ſiccome queſta potenza è attaccata all'aſſe, ed un'altra attaccata alla leva HR in R equilibra con eſſa, così, ſe ſupponiamo, che la lunghezza HR della leva ſia dieci volte maggiore del raggio dell'aſſe, la potenza in R ſarà all'altra potenza $\frac{1}{4}$P, come 1 a 10, e conſeguentemente ella ſarà $\frac{1}{10}$ di $\frac{1}{4}$P, cioè $\frac{1}{40}$P; dal che ſcorgeſi, che la potenza in R potrebbe tenere in equilibrio una forza quaranta volte maggiore di eſſa, e così in altri caſi.

Quando dunque ſia vero, come alcuni l'affermano, ch'un'Uomo, il quale tiri col mezzo d'una leva, tiri come un peſo di 25 libbre, queſt'iſteſſo coll'ajuto d'una capra potrà tener' in equilibrio un peſo 40 volte maggiore, cioè un peſo di 1000 libbre.

Del

Del CRIC, *o d'una Macchina inserviente ad alzar pesi gravissimi.*

395. Questa tal macchina è una larga sbarra di ferro, fatta a denti, in cui s'incastrano quelli d'un'asse CF (*Fig.* 192.) d' una Ruota dentata CE; e ne'denti di questa s'incastrano quei d' una rotella OH, al cui centro evvi un manico OMNI, che fa le veci d'una Ruota, il cui raggio sarebbe MN, e l' asse la rotella OH.

Ora per servirsene, s'applica la potenza sopra HI, e col manico essa fa girar la rotella OH da E in H; il che fa volgere la ruota CE da E in L, non meno che'l suo asse CF, il quale fa ascendere la nostra Macchina AB, ed alza il peso posto in A.

Il calcolo di questa Macchina è'l medesimo che quello delle Ruote dentate, cioè la potenza è al peso, come il prodotto de' raggi CF, OH degli assi a quello de' raggi CE, MN delle Ruote. Posto dunque, che'l raggio CF sia al raggio CE, come 1 a 4, e'l raggio OH al raggio MN, come 1 a 5, la potenza sarà al peso, come 1 a 20. E così, coll'aggiugner nuove Ruote dentate e nuovi assi, si potrebbe considerabilmente accrescer la forza di questa Macchina.

La Figura 191 rappresenta la Cassa AC, in cui si ripone questa Macchina, quando si vuol porre in opera; il manico di lei esce dalla cassa, ed è rappresentato in MRTV.

Della Vite.

392. Se si concepisce, ch' un prisma triangolare AMBR (*Fig.* 194.) inclinato sopra la sua base AHR sia flessibile in modo da potersi avvolgere intorno ad un cilindro, il solido da ciò prodotto s'appellerà Vite (*Fig.* 195.). E' questa Macchina incassata in un pezzo di legno nomato *Chiocciola*, la qual'entro è parimente fatta a vite, tal che l' elevazioni della Vite cilindrica s'incastrano nel cavo della Vite della Chiocciola; e in alto e talvolta anche abbasso del cilindro evvi un pezzo di legno pertugiato in modo che vi possa passare una leva MV, mediante cui una potenza in M fa girar la Vite cilindrica, ed alza un peso P attaccato all'estremità del cilindro. La distanza EF d' un' elevazione

zione del cilindro all' altra dicesi *Passo della Vite*, perchè il peso non trovasi salito a quest' altezza, se non quando 'l cilindro ha fatto un' intera rivoluzione intorno al suo asse.

393. PROPOSIZIONE LXV. *Se una potenza* M (Fig. 195.) *è mediante una Vite in equilibrio con un peso* P, *la potenza è al peso, come l' altezza* EF *dell' uno dei Passi della Vite è alla circonferenza, il cui raggio sarebbe la lunghezza* MV *della leva.*

Il peso non può alzarsi dall' altezza EF, quando la potenza M non faccia un'intera rivoluzione intorno al cilindro: così l' altezza EF e la circonferenza descritta dal punto M sono le velocità del peso e della potenza; e per conseguente, chiamando c la circonferenza descritta da M, il momento della potenza M sarà $M \times c$, e quello del peso P sarà $P \times EF$. Ma per ipotesi $M \times c = P \times EF$; onde $M . P : : EF . c$.

394. Dirà forse alcuno, che la potenza M alzandosi similmente che 'l peso descrive intorno al cilindro una spirale, e non una circonferenza di circolo, e che per conseguente la velocità della potenza dovea esser' espressa da detta spirale; ma convien' avvertire, che la potenza M, essendo perpendicolare alla leva, tende per se stessa a descrivere la circonferenza d'un circolo, e che se durante 'l suo moto ella descrive una spirale, ciò nasce dalla disposizione della Macchina, il che non apporta verun cangiamento. Siccome ancora, quantunque sopra un piano inclinato il peso scorra la lunghezza di detto piano, tuttavolta esso non è disceso nella direzione della sua gravità che dall' altezza del piano.

Del Cuneo.

395. Il Cuneo, di cui ci serviamo per fendere le legna, è un solido di legno, o di ferro fatto in forma di prisma triangolare: l'una delle sue facce ABEF (*Fig.* 196.) è minore dell'altre due AFDC, BEDC, le quali sono uguali ed ugualmente inclinate sulla faccia AFEB; la linea CD appellasi la punta del Cuneo, e la faccia AFEB n'è il capo. Ne' legni da fendersi il Cuneo si dispone in modo, che rappresenti un triangolo isoscele ABG (*Fig.* 197.).

396. PROPOSIZIONE LXVI. *Se una potenza, che spigne il capo d'un Cuneo con una direzione* RC (Fig. 197.), *equilibra colla resistenza delle parti del legno da fendersi, detta potenza è*

 alla

alla resistenza, come la metà AR *del lato* AB *del capo del Cuneo alla lunghezza* AC *dell' uno de' lati uguali*.

Supponiamo, che la potenza sia espressa dalla linea OC: la resistenza delle parti del legno dall' una e dall' altra banda del cuneo sarà perpendicolare ai lati AC, BC dello stesso Cuneo; e perciò, intorno alla retta OC presa per diagonale terminando 'l parallelogrammo OHCV, le due resistenze uguali d' ambe le parti saranno espresse dalle rette uguali HO, VO, e la potenza OC sarà alla somma delle due resistenze come OC ad OH + OV, od OH + HC. Ora, simili essendo i triangoli rettangoli ARC, XOC a motivo dell' angolo acuto comune ACR, l' angolo XOC equivale all' angolo CAR, e quindi i triangoli isosceli OHC, ACB son simili fra loro: così OC. OH + HC, o 2OH : : AB. AC + CB, o 2AC. Ma chiamando P la potenza, ed R la somma delle resistenze, abbiamo P. R : : OC. OH + HC, o 2OC. Onde P. R : : AB. AC + CB, o 2AC; ovvero P. R : : $\frac{1}{2}$AB od AR. AC.

397. Per alzare un peso col Cuneo, dee il medesimo esser fatto a guisa d' un piano inclinato, la cui base BC (*Fig.* 198.) sia orizzontale; e in caso d' equilibrio la potenza è al peso, come l' altezza AC del Cuneo alla sua base CB. Poichè 'l Cuneo non può pervenire alla posizione *a*B*c*, quando 'l peso non si sia alzato dall' altezza *a*B, od AC; e però la retta CB esprime la velocità della potenza, e la retta AC quella del peso. Donde avviene, che chiamando A la potenza, e P il peso, il momento della potenza è A × BC, e quello del peso (supponendo che qualcosa lo trattenga di scorrere e discender lungo 'l Cuneo) è P × AC: ma in caso d' equilibrio noi abbiamo A × BC = P × AC; onde A. P : : AC. BC.

398. AVVERTIMENTO. Finora, parlando delle macchine, abbiam considerato il solo caso dell' equilibrio; ma quindi egli è facile conchiudere, che per poco s' accresca il rapporto della potenza al peso, detta potenza alzerà sempre il peso, e 'l farà muovere. Nulla aggiugnerò di molte altre macchine; perchè inteso che s' abbia 'l modo di calcolare le su riferite, si calcoleranno agevolmente tutte l' altre, ancorchè men semplici di queste, non essendo esse che varie combinazioni delle già vedute.

Dell'

Dell' Idrostatica.

399. L'Idrostatica è una scienza, ch' insegna qual ne' fluidi sia 'l peso de' corpi, e quale il rapporto delle gravità di differenti fluidi.

400. Que' corpi diconsi fluidi, le cui parti non sono insieme giunte, e facilmente si disuniscono l'una dall' altra. Essi sono di due sorte; altri quelli, le cui superficie si mettono a livello, quando niente l'impedisca, come l'acqua, e tutt' i *Liquori*; ed altri quei, le cui superficie non si mettono a livello, come la fiamma, il fumo, ec. Quì non parleremo che de' fluidi della prima spezie.

401. Il volume d'un corpo è la sua estensione in lunghezza, larghezza, e profondità.

402. Quando i volumi di due corpi son' eguali, e le gravità disuguali, quello di essi, che pesa più, dicesi aver maggior *gravità* specifica dell' altro. Onde per trovare le gravità specifiche di due, o più differenti materie, elle si debbon porre sotto volumi eguali.

403. Se i volumi di due corpi son' eguali, e le gravità disuguali, quello, che pesa più, si dice esser più *Denso*, cioè aver le sue parti più prossime l'une all' altre; poichè, se le parti dell' uno o dell' altro fossero fra loro egualmente ristrette, un corpo non ne conterrebbe più dell' altro a cagione dell' uguaglianza de' volumi, e le gravità sarebbero uguali.

404. Quel corpo adunque dicesi più, o men denso, la cui massa è maggiore o minore, o quello, che sotto un medesimo volume ha maggiore o minor quantità di materia. Donde avviene, 1°. che se i volumi di due corpi son' eguali, e le masse disuguali, quello, la cui massa è maggiore, ha anche maggior densità; e siccome una massa maggiore, od una maggior quantità di materia pesa più di quella, che ne ha meno, così quello, la cui massa è maggiore, ha maggior gravità di quello, che ne ha meno. 2°. Che se i volumi sono eguali, le gravità, o densità son come le masse. 3°. Che se sono uguali le densità, le masse, o gravità son come i volumi. 4°. Che uguali essendo i volumi, le gravità specifiche sono fra se come le assolute; poichè le gravità specifiche nascono dalla differenza delle masse, o densità, le quali producono le gravità assolute.

405. PROPOSIZIONE LXVII. *Le masse* A, *e* B *di due corpi, che hanno differenti volumi, sono in ragion composta delle densità, e de' volumi.*

Sia 'l volume di A triplo di quello di B, e la sua densità doppia di quella di B : divido 'l volume di A in tre volumi eguali ciascuno a quello di B, e per conseguente in ognuno di essi la massa è doppia di quella del volume di B; poichè sotto volumi eguali le masse sono più, o men grandi a proporzione che la densità è maggiore, o minore. Onde ne' tre volumi presi insieme, cioè nel volume di A, la massa è tre volte doppia, o sestupla di quella di B; così A . B : : 6 . 1 : ma la ragion 6 : 1 è composta delle ragioni 2 . 1 delle densità, e 3 . 1 delle masse; dunque, ec.

406. Se chiamasi M la massa A, D la sua densità, V il suo volume, ed *m*, *d*, *u*, la massa, la densità, e 'l volume di B, avremo M. *m* : : D × V. *d* × *u*; dal che possiamo dedurre i seguenti Corollarj.

407. M. *m* : : D × V. *d* × *u*; onde M × *d* × *u* = *m* × D × V, e però D. *d* : : M × *u*. *m* × V, cioè le densità sono in ragion composta della ragione diretta delle masse, e dell' inversa de' volumi. Così pure, a motivo di M × *d* × *u* = *m* × D × V, noi abbiamo V. *u* : : M × *d*. *m* × D, cioè i volumi sono in ragion composta della ragione diretta delle masse, e dell' inversa delle densità.

408. PROPOSIZIONE LXVIII. *Se due corpi A, B pesano egualmente, le loro gravità specifiche sono fra se reciprocamente come i lor volumi.*

Supponiamo, che 'l volume di A sia triplo di quello di B : divido A in tre volumi uguali ciascuno a quello di B, e cadaun di loro non peserà che 'l terzo di B, poichè si suppone, che A e B pesino egualmente.

Ora sopra (*N.* 402.) s'è detto, che per giudicare delle gravità specifiche di due differenti materie conviene, che i volumi di esse sieno eguali; onde, perchè 'l volume del terzo di A è uguale a quello di B, e 'l volume di questo terzo non pesa che 'l terzo di quello di B, così ne segue, che la gravità specifica di A è a quella di B, come 1 a 3, cioè reciprocamente, come 'l volume di B a quello di A, e così dell' altre.

409. PROPOSIZIONE LXIX. *Le gravità assolute de' corpi A, B sono in ragion composta della ragione de' loro volumi, e di quella delle lor gravità specifiche.*

Supponiamo, che 'l volume di A sia triplo di quello di B, e che la gravità specifica di A sia doppia di quella di B : divi-

dendo A in tre volumi uguali ciascuno a quello di B, il terzo del volume di A peserà due volte più che 'l volume di B, poichè le gravità specifiche di A e B son come 2 ad 1, e perch' esse sono le gravità de' due volumi eguali di A e B; onde i tre volumi componenti A peseranno sei volte più che 'l volume di B, e conseguentemente la gravità assoluta di A sarà a quella di B, come *6* ad 1: ma la ragione *6*. 1 è composta delle ragioni 3. 1 de' volumi di A e B, e 2. 1 delle gravità specifiche; dunque, ec.

Dell' Equilibrio de' Liquori.

410. Ne' corpi solidi tutte le parti sono talmente insieme congiunte, che se 'l loro centro di gravità è trattenuto di discendere, esse rimangono tutte in quiete intorno a lui. Ma ciò non accade delle parti de' corpi fluidi; perchè siccom' esse non hanno fra se verun legame fisso, così si muovono per ogni verso, e a dritta, e a sinistra, e in alto, ed abbasso, ec. e la loro superficie mettesi sempre a livello.

Ciò noi lo sappiamo dalla sperienza costante ed uniforme, che ce l'insegna. In fatti, se prendesi del vino, e che a poco a poco si versi nell'acqua, si vedrà, che le parti di esso si dispergono da ogni banda, fintanto che i due liquori si sieno perfettamente mischiati l'un coll'altro, ed allora, se più non ci accorgiamo di questo moto, non è che veramente non ci sia, ma l' uniformità del colore fa, ch'ei più non si distingua. Così ancora, se gettasi del sale nell'acqua, tutte le parti di essa diventano in poco tempo salate, ec.

411. PROPOSIZIONE LXX. *Se in due canne, o cilindri cavi verticali* AB, CD (Fig. 199, 200.), *i quali abbiano comunicazione insieme mediante una canna orizzontale* EF, *si versa d' uno stesso liquore, e che i due liquori sieno a livello, essi saranno fra loro in equilibrio.*

Se le basi EB, PD delle due canne sono uguali (*Fig.* 199.), le colonne MB, ND del liquore sono altresì uguali, e per conseguenza egualmente pesanti; ond' esse premono egualmente il liquore della canna orizzontale, e però debbono equilibrar' insieme.

Se le basi EB, PD son disuguali (*Fig.* 200.), le colonne MB, ND sono fra se come le lor basi EB, PD, a motivo dell' altezze uguali BI, PN. Ora, se la colonna ND discen-

desse da qualsisia altezza NS, converrebbe, che nell' altra canna passasse una quantità d'acqua uguale ad NX, e però che l' altezza IT, a cui s' alzerebbe la colonna MB, fosse all' altezza NS, reciprocamente, come la base SX, o PD alla base MI, od EB; dovendo due cilindri eguali NX, MT aver l' altezze reciproche alle basi. Quindi la velocità NS, con cui la colonna ND discenderebbe, essendo alla velocità IT, con cui salirebbe la colonna MB, reciprocamente, come la colonna MB alla colonna ND, ne segue, che queste due colonne han forze eguali, e perciò debbono equilibrar' insieme.

Se l'una delle canne AB (*Fig.* 201.) è inclinata all'orizzonte, e l' altra verticale, ne concepisco un'altra *a*B verticale sopra la stessa base EB: ora in questa la colonna ZB sarebbe in equilibrio colla colonna ND della canna CD; dunque la colonna MB della canna AB dee altresì equilibrare con ND, equivalendo essa alla colonna ZB, a motivo della base comune EB, e dell' altezza uguale. Che se la colonna ND potesse discendere, l'altezza, a cui *m*B dovria alzarsi, equivarrebbe a quella, a cui dovrebbe alzarsi ZB.

412. Quindi ne segue, che se due liquori della stessa spezie sono in equilibrio nelle due canne verticali, debbon questi pure esser' a livello; giacchè per poco che cessasse il livello, anche l' equilibrio mancheria.

413. PROPOSIZIONE LXXI. *Se riempiesi la canna orizzontale* EF (Fig. 202.) *di Mercurio, o d'Argento vivo, e che nelle due canne verticali ed uguali si versino due differenti liquori, i quali equilibrino insieme, le qualità specifiche di essi sono fra se reciprocamente come le loro altezze.*

Essendo le basi delle colonne MB, ND fra se uguali, non può l'una discendere da una data altezza, quando l'altra non ascenda ad un'altezza eguale: così uguali essendo le velocità di queste due colonne, siccome lo sono le lor forze a motivo dell' equilibrio, bisogna, che le loro masse sieno uguali, perchè altro non sono le forze che le masse moltiplicate per le loro velocità; e siccome le masse uguali hanno gravità assolute eguali, così ne segue, che le colonne MB, ND pesano egualmente. Posto dunque, che 'l volume della colonna MB sia triplo di quello della colonna ND, il terzo del volume di MB non peserà che 'l terzo del volume di ND: ma il terzo MB equivale al volume di ND, e quando i volumi son' eguali, le gravità specifiche delle materie

sono

ſono come l'aſſolute di detti volumi eguali. Onde la gravità ſpecifica di MB è alla ſpecifica di ND, come 1 a 3, cioè reciprocamente come'l volume di ND a quello di MB, ovvero come l' altezza di ND a quella di MB; perchè a cagione delle baſi uguali i volumi ND, MB ſon come le loro altezze.

414. Se dunque ſi conoſce la gravità ſpecifica d'un liquore, mediante queſte canne ſi potrà agevolmente conoſcer quella d' un' altro.

415. PROPOSIZIONE LXXII. *Se due vaſi* AB, CD (Fig. 203.), *i cui lati ſieno perpendicolari, ſi riempiono d'uno ſteſſo liquore, le preſſioni, che ſoffrono i loro fondi, ſono fra ſe in ragion compoſta della ragione dell' altezze, e di quella delle baſi.*

Eſsendo i liquori, eſiſtenti nei due vaſi, della ſteſsa natura, le loro maſse, o gravità ſono fra ſe come i lor volumi: ma i volumi ſono in ragion compoſta della ragione dell'altezze, e di quella delle baſi; dunque, perchè le maſse premono i fondi con tutta la lor gravità a motivo de' lati perpendicolari, detti fondi ſon premuti in ragion compoſta della ragione dell'altezze, e di quella delle baſi.

416. Se le baſi ſon diſuguali, e l'altezze uguali, le preſſioni ſono come le baſi; ſe poi le baſi ſono eguali, e l' altezze diſuguali, le preſſioni ſon come l'altezze; e ſe uguali ſono tanto le baſi quanto l'altezze, le preſſioni ſon pure eguali.

417. Mi ricordo d'aver detto ſopra (e a tal propoſito io credo di dover prevenire un'obbiezione, che potrebbemi eſser fatta,) che ſe in due canne diſuguali AB, CD (*Fig.* 200.) aventi comunicazione inſieme mediante una canna orizzontale ED ſi verſa dell'acqua, e che l' acqua delle due canne ſia a livello, le due colonne MB, ND ſaranno in equilibrio: così l'acqua della canna inferiore EF, che ſoſtiene le due colonne MB, ND, fa'l medeſimo effetto che ſe ſi metteſse un fondo EB, il quale ſosteneſse la colonna MB, ed un'altro PD, che ſoſteneſse l' altra colonna ND. Ma a motivo dell'altezze uguali BI, PN i due fondi EB, PD ſarebbero premuti in ragione delle lor baſi; e ſiccome queſte baſi ſon diſuguali, così ancora diſuguali ſarebbero le preſſioni delle due colonne. Onde, ci può venir' obbiettato, premendo le due colonne diſugualmente l' acqua della canna inferiore EF, non può fra eſse due colonne eſservi equilibrio; il ch'è contrario alla dimoſtrazione del numero 411.

Per riſolvere queſta tal'obbiezione, è d'uopo provare, che le co-

lon-

lonne MB, ND equilibrano insieme non ostante la disuguaglianza delle lor pressioni ; il che io farò indipendentemente dalle cose dette sopra N°. 141.

Supponiamo, che la base EB della colonna MB non sia che 'l terzo della base PD della colonna ND; in vece della canna AB ne metto un'altra AX, la cui base EX equivaglia a PD, e versando in AX dell'acqua, finchè sia a livello con quella della canna CD, le colonne MX, ND saranno uguali non meno che le lor pressioni, tal che fra dette due colonne vi sarà equilibrio : ora se si concepisce, ch' ognuna di queste tre colonne sia divisa in tre colonne uguali, le lor basi EX, PD saranno altresì divise in tre basi uguali; e così le tre colonne componenti la colonna MX saranno in equilibrio ciascuna a ciascuna colle tre componenti la colonna ND.

Quindi mettasi in EX un tramezzo, ch' equivaglia alla base di due delle colonne componenti la colonna EM, e che tanto resisti alla pressione delle due colonne corrispondenti alla colonna ND, quanto le due, ch' erano al di sopra di detto tramezzo ; poscia sopra 'l restante dell' apertura EB mettendo la canna AB, egli è manifesto, che la colonna, la qual' è il terzo della colonna ND, equilibrerà colla colonna MB uguale al terzo, e che gli altri due terzi della colonna ND, trovando tanta resistenza nel posto tramezzo, quanta essi ne ritrovavano nelle due colonne, ch' erano al di sopra di detto tramezzo, equilibreranno con loro; e perciò non potrà ND sforzare MB, e vi sarà equilibrio, quantunque uguali non sieno le due pressioni di MB, ND.

418. Se l'uno de' vasi cilindrici AB (*Fig.* 201.) fosse inclinato all' orizzonte, e l' altro CD verticale, e che amendue si riempissero d' uno stesso liquore, i fondi sarebbono premuti in ragion composta dell'altezze e delle basi. Poichè, in vece del loro fondo, ponendo una canna orizzontale EF, e versando in amendue dell' acqua, essa si metterà a livello, e la colonna MB equilibrerà colla colonna ND (*N*.411.) : così ancora, se in vece della canna inclinata AB se ne mette una verticale *a*B d' egual base, la colonna ZB sarà pur' in equilibrio colla colonna NP. Quindi le colonne ZB, ed MB, facendo 'l medesimo effetto, premeranno egualmente l' acqua della canna EF. Ora, se in vece della canna EF poniamo alle colonne ZB, ND due fondi EB, PD, che sostengano le pressioni di dette due colonne, essi

fondi

fondi saran premuti in ragion composta delle basi e dell'altezze: ma la colonna MB tanto preme il suo fondo, quanto la colonna ZB; onde i fondi de' vasi MB, ND sono altresì premuti in ragion composta delle basi, e dell'altezze.

Tutto ciò sarebbe pur vero, se le canne, od i vasi, in vece d'esser cilindrici, fossero prismatici, cioè se le basi superiori equivalessero all'inferiori.

419. PROPOSIZIONE LXXIII. *Se riempiesi d'acqua un vaso* ABCDEFHL (Fig. 204.), *la cui base superior'* ABCD *sia minore del fondo* HLEF, *detto fondo è tanto premuto, quanto ei lo sarebbe, se la base superior fosse uguale all'inferiore.*

Concepisco un vaso prismatico OE d'ugual base ed altezza del vaso ABCDEFHL; in esso vaso OE, ch'io concepisco pieno d'acqua, metto due sezioni, o tramezzi BCPQ, ADRS perpendicolari alla base, tal che la parte QPSR della sua base HLEF equivaglia alla superiore ABCD del vaso ABCDEFHL. Mediante questa costruzione, il vaso prismatico OE sarà diviso in tre vasi prismatici OP, BR, AE, e le pressioni dell'acqua sopra queste tre basi saranno fra se come le basi, a motivo dell'altezze uguali (*N.* 415.); e levando i tramezzi, queste tre basi saranno ancora compresse nello stesso modo, perchè sopra ciascuna di esse vi sarà sempre una stessa quantità d'acqua: divido la colonna d'acqua OBQHLPCZ mediante un tramezzo diagonale BHLC, tal che levando l'acqua, ch'è al di sopra, il tramezzo prema tanto l'acqua inferior di questa colonna, quanto essa l'era dalla superiore; ed è manifesto, che la base HQPL sarà premuta quanto eralo prima. Così pure, se nella colonna ATFSREXD io pongo un tramezzo diagonale ADEF, che tanto prema l'acqua inferior di questa colonna, quanto essa l'era dalla superiore, la base RSFE di detta colonna farà premuta come prima. Ma i due tramezzi BCLH, ADEF col restante del vaso prismatico OE formano il dato vaso ABCDEFHL; onde il fondo di detto vaso è tanto premuto, quanto quello del vaso prismatico OE, che sarebbe altresì ripieno d'acqua, e per conseguente il fondo del dato vaso è tanto premuto, quanto lo saria, se la sua base superior fosse uguale all'inferiore.

420. Mi si opporrà forse, che quando vera fosse questa proposizione, ne seguirebbe, che 'l vaso prismatico OE pieno d'acqua non peserebbe più del vaso ABCDEFHL, parimente ripieno d'acqua, benchè quest'ultimo ne contenga meno; ma fa di mestie-

re distinguer bene fra la gravità della massa totale d' un fluido rinchiuso in un vaso, e le pressioni di esso fluido contro 'l fondo e i lati del vaso: la gravità della massa totale non ha altra direzione se non se quella, che spigne verso 'l centro della terra, là dove il fluido da ogni banda egualmente preme i lati del vaso. In fatti, prima d'aver nel vaso prismatico OE posti li tramezzi BCLH, ADEF seganti diagonalmente le colonne laterali di detto vaso, l'acqua superiore a questi tramezzi era in equilibrio coll'inferiore, poichè la superficie superior dell' acqua del vaso era a livello; dunque l'acqua inferior delle colonne laterali tanto premea la superiore da basso in alto, quanto la superior ne premea l'inferiore d'alto abbasso. Perciò i tramezzi, facendo 'l medesimo effetto che l'acqua superiore, debbono dall'inferior esser premuti da basso in alto nel modo stesso che l'era la superiore. Ora ciò posto, è chiaro, che le pressioni d' un fluido racchiuso in un vaso, spignendo da ogni parte egualmente, non possono accrescer la gravità del liquido, che non spigne se non se verso 'l centro della terra; e ch' in conseguenza la massa d' acqua contenuta nel vaso prismatico OE, essendo maggiore di quella contenuta nel vaso ABCDEFHL, dee pesar più di questa, quantunque le pressioni sopra i fondi sieno uguali.

421. PROPOSIZIONE LXXIV. *Se riempiesi d' acqua un vaso* ABCDEFGH (Fig. 205.), *la cui base superior'* ABCD *sia più grande dell' inferiore* EFGH, *non è questa, o'l fondo maggiormente premuto dal liquore, che se la base superior' equivalesse all' inferiore.*

Concepisco un vaso prismatico BO, la cui base inferiore PSRO sia uguale alla superior' ABCD di esso: essendo 'l medesimo pieno d' acqua, concepisco due sezioni ZLHG, XQEF perpendicolari alla base, tal che la parte HGEF del fondo di questo vaso compresa fra le due sezioni equivaglia al fondo del dato vaso. Così 'l vaso prismatico BO è composto di tre vasi prismatici BH, ZE, XO, e i loro fondi son premuti dalle tre colonne d'acqua in ragione di questi stessi fondi, a motivo dell' altezze uguali delle colonne; e levando dette due sezioni ZLGH, XQEF, le pressioni delle colonne sul loro fondo sono ancora le stesse. Concepisco nelle due colonne laterali due tramezzi CHGB, DAFE, i quali le seghino diametralmente, in modo che levando l' acqua inferiore, essi sostengano la superiore nella stessa maniera, che l'era dall'inferiore; ed è manifesto, ch' equilibrando l' acqua superior con questi tramezzi, ella punto non agirà sul fondo HGFE della

la colonna di mezzo. Ora i due tramezzi giunti col restante del vaso prismatico BO compongono il dato vaso ABCDEFGH; onde'l fondo di questo vaso non è più premuto dall' acqua in esso contenuta, che se la base superior fosse uguale all' inferiore, cioè egli non l'è altrimente, che se la sola colonna di mezzo il premesse.

422. PROPOSIZIONE LXXV. *Tutte le parti della superficie d'un vaso pieno d'acqua sono premute in ragion composta delle loro grandezze e distanze dalla superficie superior dell' acqua compresa nel vaso.*

Sia un vaso AB (*Fig.* 206.) avente all'uno dei suoi lati una canna verticale HL, la cui base è HP. Se riempiesi 'l vaso d'acqua, ell'ascenderà lungo la canna, e si metterà a livello con quella del vaso, potendo'l vaso considerarsi come una canna, che comunichi colla HL. Entro 'l vaso io metto una canna HV, che abbia per base l' orificio HP, su cui ella è perpendicolare, e la cui altezza HX sia uguale alla distanza di quest'orificio alla superficie superiore dell' acqua del vaso, cioè all' altezza media NT del cilindro d'acqua; e così i due cilindri d'acqua HV, HE, essendo d'ugual'altezza, sono fra se come le lor basi, ed equilibrano insieme. Perchè, se nel cilindro HE passar potesse una parte HS del cilindro XV, ella dovrebbe nella canna HL occupare un volume EL uguale al volume HS; e però l' altezza del volume EL sarebbe a quella del volume HS, reciprocamente, come la base HP di HS è alla base FE di EL. Donde avviene, che le forze di queste due colonne son'uguali, per essere le loro velocità fra se reciprocamente come i lor volumi.

Così pure, se supponiamo due altre canne, l'una esteriore MO, e l'altra interna MQ, le cui altezze sieno uguali, proveremo come sopra, che le due colonne d'acqua contenute in esse canne sono in equilibrio; però, se in vece degli orificj HP, MY si pongono due tramezzi, che tanto resistano all'acqua delle canne interne, quanto lor resisteva l' acqua dell'esterne, egli è per se chiaro, che detti due tramezzi saranno premuti in ragione delle due colonne d'acqua HV, MQ: ora queste due colonne sono in ragion composta della ragione delle lor basi, e di quella delle loro altezze, cioè delle distanze dalle lor basi alla superficie superiore dell'acqua del vaso; onde i tramezzi saranno premuti nella stessa ragione. Ma i detti tramezzi son parti della superficie del vaso; dunque, ec.

423. Da tutto ciò ne risulta, che col mezzo dell' acqua si potrebbero facilmente alzar pesi considerabili.

Sia un gran bacino AB (*Fig.* 207.) ripieno d'acqua, ed esattamente chiuso da ogni banda. Sopra 'l suo coperchio v' adatto due canne PR, SX, il cui orificio P dell'una sia picciolo, e l' altro ST assai grande: se in amendue esse canne io verso dell' acqua, ella si metterà a livello; così, posto che questo livello sia all'altezza PH d'un piede, e che l'orificio ST sia cento volte maggiore dell'orificio P, la colonna PH sosterrà la colonna SN cento volte più pesante di essa. E se in vece della colonna SN mettesi un pistone sull'orificio ST, sopra cui siavi un peso, che con esso pistone pesi quanto SN, la colonna PH equilibrerà col pistone e col peso; perciò, se di nuovo nella canna PR versasi dell'acqua, ella forzerà il pistone e 'l peso a salire nella canna SX.

Posto dunque, che la colonna PH contenga un piè d'acqua cubo, il quale per le sperienze fatte pesa 70 libbre, sarà detta colonna in equilibrio con 100 volte 70 libbre, cioè con libbre 7000; e basterà continuar' a versare dell'acqua, benchè assai lentamente, nella canna PR, per alzar' il peso quanto alto si vorrà.

Poichè, se vogliamo p. e. che 'l peso s'alzi all' altezza d'un piede, converrà versar 102 piedi d'acqua cubi, a motivo che la colonna SN ne conterrà 100, e la colonna PH due; cioè 100 di loro equilibreranno colla colonna SN, e gli altri due col peso, che sarà sopra detta colonna.

De' Corpi tuffati ne' Fluidi aventi minor gravità specifica di essi.

424. PROPOSIZIONE LXXVI. *Se tuffiamo un corpo in un fluido, che abbia minor gravità specifica di esso, detto corpo perde una parte del suo peso uguale al peso d' un volume del fluido equivalente a quello del corpo.*

Se supponiamo, che nell'acqua sia tuffato un piè cubo di piombo, egli occuperà il sito d' uno stesso volume d' acqua: ma il peso di questo volume era sostenuto dall'acqua che 'l circondava; onde una medesima quantità di peso del piè cubo di piombo sarà altresì sostenuta dall' acqua che 'l circonda, ed in conseguenza il piombo peserà meno di tutta questa quantità.

425. Però un corpo tuffato in un fluido avente minor gravità spe-

ſpecifica di eſſo non diſcende al fondo che con una forza uguale alla differenza del ſuo peſo a quello del fluido d'egual volume; e per conſeguente la potenza, che può tenere il corpo in equilibrio, cioè impedirlo che diſcenda fino al fondo, equivale a queſta differenza.

426. PROBLEMA. *Rinvenire le gravità ſpecifiche di differenti fluidi.*

Prendaſi una bilancia ordinaria AB (*Fig.* 208.); all'eſtremità A mettaſi un uncino E, ch'equilibri colla lance C ſoſpeſa all'altra eſtremità B; attacchiſi a queſt'uncino un erine di cavallo, da cui penda una palla di piombo P; peſiſi queſta palla nell' aria; poi ſucceſſivamente tuffandola in ciaſcun fluido ſi peſi di nuovo in cadaun d'eſſi, e le perdite di peſo fatte da queſta palla ne' fluidi ſon le gravità ſpecifiche di detti fluidi.

Perchè i volumi dei fluidi, il cui ſito viene occupato dalla palla P, ſon tutti eguali fra loro, e a quel della palla. Ora 'l peſo d'ognuno di queſti volumi di fluidi equivale alla perdita di peſo, che fa la palla quando è tuffata nel fluido corriſpondente. Onde i differenti peſi de' volumi eguali di fluidi, il cui ſito viene occupato dalla palla, ſon'uguali alle differenti perdite di peſo, che fa la palla quando è tuffata in queſti differenti fluidi. Ma quando i volumi ſon'uguali, i differenti peſi di eſſi volumi dinotano le gravità ſpecifiche; dunque le gravità ſpecifiche de' differenti fluidi, nei quali è tuffata la palla, ſon'eſpreſſe dalle differenti perdite di peſo fatte dalla palla medeſima.

Supponiamo, per eſempio, che la palla P peſi 12 libbre, e ch' eſſendo la ſteſſa ſucceſſivamente tuffata in due fluidi, nel primo ella perda 3, e nel ſecondo 4 libbre del ſuo peſo; i due volumi eguali de' fluidi, il cui ſito verrà occupato dalla palla, peſeranno l' uno 3, e l'altro 4 libbre. Però, a cagione de' volumi eguali, le gravità ſpecifiche di queſti due fluidi ſaranno come 3 a 4, e così negli altri caſi.

427. Ora in tal modo ſi può conoſcere il peſo d'un liquore contenuto in un vaſo; e perciò colle regole della Geometria ſi miſura prima la capacità del vaſo, poi all' uncino della bilancia ſoſpendendo un piè cubo di piombo, cercaſi quanto ei perda del ſuo peſo, quando è tuffato nel liquore. Così la perdita di peſo da eſſo fatta equivale al peſo d'un piè cubo del liquore, e però diceſi per la Regola del Tre: ſe tanto peſa un piede cubo del liquore, quanto peſerà'l numero dei piè cubi contenuti nel vaſo?

428. PROBLEMA. *Trovar le gravità specifiche di due, o più differenti materie solide.*

Piglinsi due pesi eguali delle due differenti materie date; mettasi l'uno nella lance C della bilancia (*Fig.*208.), poi sospendasi l' altro P all' uncino E, e i due pesi equilibrano insieme. Tuffisi P nell' acqua, e s'esamini quanto ei perda del suo peso. Si ritiri P, e pongasi in C; quindi trasportando l'altro peso in E, si cerchi pure quanto ei perda del suo peso, immerso che sia nell'acqua; e le perdite fatte da questi due pesi sono fra se, reciprocamente, come le gravità specifiche delle due materie; il che io così provo.

Differenti essendo le materie de' due pesi eguali, le densità e conseguentemente i volumi dei medesimi debbono pure esser differenti, poichè la differenza delle densità è ciò che costituisce la differenza delle materie; così i volumi d'acqua, il cui sito viene da questi due pesi occupato, son differenti: ma essendo l' acqua della stessa natura, o densità in amendue i volumi, le gravità di essi sono fra loro come i volumi medesimi; però le perdite, dai due pesi fatte nell'acqua, son pure come i due volumi d'acqua, o come i volumi dei due pesi. Ora, quando due pesi pesano egualmente, le loro gravità specifiche sono fra se, reciprocamente, come i lor volumi; ond'esse sono altresì reciprocamente come le perdite dai due pesi fatte nell'acqua.

Supponiamo, che'l primo dei due pesi eguali abbia nell' acqua perduto tre libbre del suo peso, e che l' altro ne abbia perdute 4: il volume d'acqua, il cui sito verrà occupato dal primo peso, peserà dunque tre libbre, e quello, il cui sito viene occupato dal secondo, ne peserà quattro; e questi due volumi, egualmente che quei dei due pesi, saranno fra loro come 3 a 4. Così la gravità specifica del primo peso sarà a quella del secondo, come 4 a 3.

429. In tal modo si son trovate le gravità specifiche de' seguenti solidi, aventi tutti un volume eguale a quello d' una massa d'oro del peso di 100 libbre:

Mer.

Mercurio	71 ℔ $\frac{1}{2}$	Stagno semplice . .	38 ℔ $\frac{1}{2}$
Piombo	60 $\frac{1}{2}$	Calamita	26
Argento	54 $\frac{1}{3}$	Marmo	21
Oro	100	Pietra dura	14
Rame	47 $\frac{1}{3}$	Solfo	12 $\frac{1}{2}$
Ferro	42	Cera	5
Stagno Comune . . .	39	Acqua	5 $\frac{1}{3}$

Per ritrovare mediante questa Tavola quale sia p. e. la gravità d' un solido di piombo, il cui volume equivaglia ad uno d' acqua del peso di 200 libbre, diremo per la Regola del Tre: la gravità specifica $5\frac{1}{3}$ dell' acqua è alla specifica $60\frac{1}{2}$ del piombo, come la gravità 200 libbre d' acqua è ad un quarto termine, che sarà la gravità del proposto volume di piombo, e così in altri casi.

De' Corpi tuffati ne' Fluidi aventi maggior gravità specifica di loro.

430. PROPOSIZIONE LXXVII. *Se un corpo è gettato in un fluido avente maggior gravità specifica di lui, ei s' affonderà nel fluido, fintanto che 'l volume d' acqua, di cui egli occuperà 'l sito, pesi quanto 'l corpo.*

Avendo 'l corpo ABCD (*Fig.* 209.) minor gravità specifica del fluido, un minor volume ABC di detto fluido peserà quanto esso corpo; dunque, quando 'l corpo affondandosi avrà cacciato questo minor volume d' acqua, le parti del fluido, che sostengono questo minor volume, sosterran pure il peso del corpo, e per conseguente la parte ADC galleggierà.

431. La gravità specifica d' un corpo, il quale pesi meno d' un fluido, è alla specifica di questo fluido, come 'l volume della parte del corpo, che s' affonda nel fluido, è al volume totale del corpo; poichè pesando egualmente il corpo e 'l volume del fluido, di cui la sua parte ABC occupa 'l sito, le gravità specifiche del corpo, e del fluido sono fra se reciprocamente come i lor volumi (*N.* 408.); ed in conseguenza la gravità specifica del corpo è a quella del fluido, reciprocamente, come 'l volume ABC del fluido, cioè della parte affondata ABC è al volume totale del corpo ABCD.

432. *Se*

432. *Se una potenza P (Fig. 210.) tiene in equilibro sotto la superficie d'un fluido un corpo ABCD avente minor gravità specifica di esso, la potenza è al peso del corpo, come la differenza delle gravità specifiche del fluido e del corpo è alla specifica di esso corpo.*

Prendo un volume del fluido uguale a quello della parte ABC del corpo, che liberamente s'affonderebbe nel fluido, e'l chiamo $= x$. Piglio parimente un'altro volume del fluido eguale al totale ABCD del corpo, e l'appello $= y$; finalmente, nomando $= z$ la differenza ADC de'due volumi x, y, è manifesto, ch' avendo i due volumi x, y densità eguali, le lor gravità sono fra se come i volumi.

Ora, quando la potenza P tiene in equilibrio il corpo ABCD sotto la superficie del fluido, detto corpo occupa'l sito del volume y, ch'era sostenuto dal fluido, che 'l circondava; e siccome ABCD non pesa più che 'l volume x, così è manifesto, che dee questo corpo esser rispinto in alto dal fluido circondante con una forza eguale alla differenza dei pesi de' volumi x, y, cioè alla differenza z di detti due volumi, esprimendo i pesi dei volumi per x, y: ma la potenza P equivale alla forza, che rispigne il corpo in alto; onde P uguale al peso z. Ora le gravità specifiche del corpo e del fluido sono fra se come i volumi x, y (*N.* 431.), o come i pesi x, y; dunque la lor differenza è parimente come z; e perconseguente la potenza P è al peso ABCD, come la differenza z delle gravità specifiche del fluido e del corpo alla specifica x del corpo ABCD.

433. *Ma se la potenza impedisce ad un corpo, avente maggior gravità specifica del fluido, di discendere fino al fondo, allora la potenza è al peso del corpo, come la differenza delle gravità specifiche del corpo e del fluido è alla specifica del corpo.*

Chiamo x il volume del fluido eguale a quello del corpo; y il volume dello stesso fluido, che peserebbe quanto 'l corpo, e z la differenza di essi due volumi: così essendo questi due volumi egualmente densi, le loro gravità, od i pesi son'espressi dai volumi x, y, e la differenza dei medesimi pesi lo è da z. Ora l'acqua, che circonda'l corpo, non può sostenere che 'l peso x; onde 'l corpo, il cui peso equivale ad y, discende verso'l fondo con una forza uguale a z, e conseguentemente la potenza, che sostiene detto corpo, è altresì uguale a z, e però ella è al corpo come z ad y: ma perchè il volume y pesa quanto'l corpo, la gravità specifica di esso

cor-

corpo è alla specifica del fluido, reciprocamente, come 'l volume y del fluido è a quello del corpo, ovvero al suo eguale x. Dunque le gravità specifiche del corpo e del fluido son pure espresse da y, x, e la lor differenza da z; e per conseguente la potenza è al corpo, come la differenza z delle due gravità specifiche è alla specifica y del corpo.

434. PROBLEMA. *Dati il peso d' un corpo, il rapporto della sua gravità specifica a quella d' un fluido, che ne ha meno, e la specifica d' un' altra materia, avente minor gravità specifica del fluido, determinare la quantità di questa seconda materia, che conviene aggiugner' al primo corpo, perchè gettati amendue nel fluido, restino tra la superficie del fluido e 'l fondo.*

La gravità del primo corpo sia 60 libbre, e 'l rapporto della sua gravità specifica a quella del fluido sia come 3 ad 1. Dunque la gravità specifica di questo corpo è alla differenza delle gravità specifiche del corpo e del fluido, come il peso del corpo è alla potenza, che terrebbe questo corpo fra la superficie del fluido e 'l fondo (*N.* 432.); onde facendo $3 \,.\, 3 - 1$, ovvero $3 \,.\, 2 :: 60 \,.\, 40$, dal quarto termine 40 esprimerassi la potenza, ch' impedirà 'l corpo di discendere verso 'l fondo.

Ora 'l rapporto della gravità specifica dell' altra materia alla specifica del fluido sia come 1 a 4; dunque la differenza delle due gravità specifiche è alla specifica del corpo, come la potenza, che dee tener sommersa la parte della materia cercata, è al peso di essa parte (*N.* 432.): ma avendo questa potenza una direzione contraria alla potenza, che terrebbe l' altro corpo fra la superficie del fluido e 'l fondo, è manifesto, che non possono queste due potenze essere in equilibrio, quando non sieno eguali, e però anche questa seconda potenza dee essere $= 40$; onde facendo $4 - 1$, o sia $3 \,.\, 1 :: 40 \,.\, \frac{40}{3}$, o $13\frac{1}{3}$, quest' ultimo termine $13\frac{1}{3}$ sarà 'l peso della seconda materia, che si dee aggiugnere al primo corpo, acciò tuffandoli nel fluido, la loro massa totale rimanga fra la superficie e 'l fondo; perciocchè tendendo l'una verso 'l fondo pel suo peso, ed essendo l'altra rispinta verso l' alto con forze uguali alle potenze, che le terrebbero fra la superficie e 'l fondo, esse si manterranno in equilibrio.

Manifesto si scorge, che se alcun poco s' accresce 'l peso avente minor gravità specifica del fluido, la massa totale ascenderà fino alla superficie dell' acqua; dove all' opposto, se s' accresce l' altro peso,

peso, la massa totale anderà a fondo. E quindi si può facilmente inferir la maniera di far sopra la superficie dell' acqua risalire i corpi sommersi.

Dell' Areometria, e Misura dell' Aria.

435. L' Aria è un fluido, che circonda la terra, e quì fra noi esistente ovunque ci par che nulla ci sia.

436. L' aria è pesante, elastica, ed atta ad esser compressa, a dilatarsi, ad esser rarefatta dal calore, e condensata dal freddo; e ciò si sa per le sperienze, di cui ragioneremo fra poco.

437. Per *Areometria*, o Misura dell' Aria s' intende adunque quella Scienza, che c' insegna a conoscere i differenti gradi di gravità, di forza elastica, di compressione, o dilatazione, ec. che trovansi nel fluido circondante la terra, secondo i differenti cangiamenti, che possongli accadere.

438. Se accostiamo con molta celerità la mano al viso, sentesi non so che sforzo, da cui si comprende, che veramente la mano non muovesi (come pare) in uno spazio voto, ma spigne realmente verso 'l viso qualche corpo; ed egli è appunto ciò che noi chiamiamo *Aria*.

439. Se pigliasi un vaso esattamente chiuso da ogni banda, e che dopo avervi fatto un picciolo pertugio, od orificio, a cui vi s' adatti una chiave, che ben lo chiuda, si pesi, e che mediante un cilindro cavo con un pistone fatto a guisa di sifone s' introduca in detto vaso una maggior quantità d' aria che non contiene, trovasi, chiudendo colla chiave l' orificio e rimettendo il vaso nella bilancia, ch' ei pesa più di prima. E se girando la chiave schiudesi l' orificio, e s' accosta la mano all' apertura, si sentirà uscir l' aria; dopo di che, se di nuovo si pesa 'l vaso, ei si troverà dello stesso peso di prima.

Ora quindi ne segue, 1°. che l' aria pesa, poichè l' aumento del peso del vaso non può attribuirsi ch' alla quantità maggiore fattavi entrare. 2°. Che questa gravità tende verso 'l centro della terra, perch' ella spigne la lance della bilancia verso detto centro. 3°. Che l' aria può condensarsi, poichè 'l volume del vaso, essendo sempre lo stesso, ne contiene ora più, ora meno. 4°. Che la stessa può dilatarsi, poichè, subito che girando la chiave schiudesi l' orificio, ella n' esce; e ciò succede, perchè l' aria, che prima era nel vaso, tende a ripigliare il suo volume. 5°. Finalmente, che l' aria è dotata di forza elastica, la quale fa, ch' ella si dilati dovunque; perchè

chè o si metta la mano dirimpetto all'orificio, o al di sopra, o al di sotto, o a dritta o a sinistra, si sentirà da per tutto ad uscir l'aria, a differenza degli altri liquidi, i quali non escono che da un lato, cioè verso'l centro della terra.

440. Se dopo aver soffiato in una vescica di porco, finchè sia divenuta mediocremente gonfia, ed aver con forza chiusa la sua apertura, perchè l'aria non n'esca, ella sempre più s'accosta al fuoco, finalmente creperà con gran rumore; ma se prima che crepi si ritirerà dal fuoco, a poco a poco si sgonfierà, e ritornerà nel suo primo essere. Che se si trasporta in un'aria assai più fredda, ella si farà in minor volume di quello s'era messa soffiandovi dentro.

Ciò fa manifestamente vedere, che dove'l calore rarefa l'aria, ed accresce la sua forza elastica, il freddo all'incontro la condensa, e diminuisce detta sua forza; trovandosi le sue parti men tese nel freddo che nel caldo.

441. Se pigliasi un cannone, o cilindro cavo AB (*Fig.* 211.), e che dopo aver posto due turaccioli all'estremità A, B si spinga l'uno B verso l'altro A, quando B sarà giunto in una certa distanza AE da A partirà rapidamente e con rumore.

Ora, siccome ciò non può succedere se non perchè l'aria, ch'era contenuta fra i turaccioli A e B, trovasi troppo compressa, quando B è giunto in E, così ne segue, ch'una eccedente compressione dell'aria accresce la sua forza elastica, siccome un freddo eccessivo, il quale troppo condensasse l'aria, in vece di diminuire la sua forza elastica, l'accrescerebbe; e si può altresì dire, ch'un calor troppo grande farebbe all'aria perder tutta la sua forza elastica, perchè non essendo infinita la forza elastica dell'aria, una dilatazione troppo grande dee finalmente far che manchi.

442. L'aria troppo compressa fa sforzo per dilatarsi, ed in fine là se ne sfugge, ove trova minor resistenza. Così pure l'aria dilatata pel calore, facendo sforzo contra i corpi che la circondano, fa ceder quei, che meno le resistono; e perciò coloro, che fan le mine, le dispongono in modo, che le terre ch'essi vogliono mandar'in aria resistan meno dell'altre, che circondano i loro fornelli.

Se si potesse comprimer l'aria nella camera d'una mina così agevolmente che si dilata mediante'l fuoco che s'appicca alla polvere, si manderebbero le terre, che fossero sopra, in aria colla stessa facilità.

Lo sperimento del cilindro AB chiuso dai due turaccioli A, B n'è una prova, non meno che gli archibusi a vento.

443. Piglisi una canna AC (*Fig.*212.), la cui lunghezza superi 32 piedi, e si chiuda l'apertura inferior C; poi, dopo averla riempiuta d'acqua e tuffata verticalmente in un vaso DE pieno pure d'acqua, si schiuda C, e l'acqua della canna discenderà, sforzando quella del vaso a diffondersi finchè sia giunta in M, ove la sua superficie sarà a livello con quella dell'acqua del vaso, come s'è dimostrato nell'Idrostatica: ma se prima di schiuder C turasi esattamente l'apertura A, e che poi si apra C, l'acqua della canna discenderà, finchè la superficie superiore sia al di sotto di quella dell'acqua del vaso dell'altezza di 32 piedi; dopo di che ella più non discenderà.

Ora da ciò si comprende, ch'una colonna d'aria, il cui diametro sia uguale a quel della canna, e la cui altezza s'estenda dalla superficie dell'acqua del vaso fino al sito più elevato dell'aria, non pesa più che la colonna d'acqua della canna BN di 32 piedi d'altezza; il che io così provo.

Supponiamo, che i lati del vaso sieno perpendicolari sul fondo e prolungati fino all'altezza di 32 piedi al di sopra della base superior DH, e che'l fondo VE sia cinquanta volte maggiore dell'apertura C della canna: è manifesto, che se riempiesi d'acqua il vaso così prolungato, l'acqua compresa fra DH ed RS sarà cinquanta volte maggiore dell'acqua della canna; cioè l'acqua, che circonderà la canna, è a quella della stessa canna, come 49 ad 1, e però quest'acqua peserà quanto 49 colonne uguali alla colona d'acqua della canna. Ma per le Regole dell'Idrostatica, sturato l'orificio A, le 49 colonne sostengono la colonna della canna senza farla ascendere al di sopra del loro livello, e per l'esperienza testè mentovata, se chiudesi A e che si levino le 49 colonne, l'aria che pesa sopra DH sostiene la colonna della canna alla medesim'altezza; onde quest'aria pesa egualmente che le 49 colonne, e per conseguenza una colonna di quest'aria d'egual base dell'orificio C, e la cui altezza s'estenda dalla superficie DH fino al sito più elevato dell'aria, pesa quanto la colonna d'acqua della canna di 32 piedi d'altezza.

Mi si dirà forse, che le 49 colonne d'acqua non sostengono la colonna d'acqua della canna unicamente pel loro proprio peso, ma per quello eziandio delle colonne d'aria, che sono perpendicolari; e ch'in conseguenza, quando si sopprimono le 49 colonne

ne d' acqua, e che l' aria che prende 'l loro sito fa lo stesso effetto, bisogna che le 49 colonne d'aria d' eguale altezza delle 49 d' acqua sieno quelle che pesino quanto dette colonne. Ma è d' uopo avvertire aver'io detto, che mettendo le 49 colonne d' acqua si lasci l' orificio A aperto; e così caderà l' obbiezione, perchè se le 49 colonne d'acqua son premute dall' aria che pesa sopra di esse, la colonna d' acqua della canna è altresì premuta dall'aria che l'è verticale; e siccome l'aria mettesi a livello a guisa degli altri fluidi, e ch'in conseguenza la sua altezza è dovunque in egual distanza della superficie della terra, concependo che questa superficie sia da per tutto in egual distanza dal suo centro, ne segue, che l'aria, la qual pesa sulle 49 colonne d'acqua, è a quella che pesa sulla colonna della canna, con cui ella equilibra, come 49 ad 1, e però il peso dell'aria, ch'è sulle 49 colonne d'acqua, è a quello dell'aria, ch'è sulla colonna della canna, come 49 ad 1. Talche il peso delle 49 colonne d'acqua giunto a quello dell'aria superiore è al peso della colonna della canna giunto a quello dell' aria, che pesa sopra essa, come 49 ad 1: ma il peso delle 49 colonne d' acqua e d' aria, che le carica, equilibra con quello della colonna della canna e dell'aria superiore; onde d'amendue le parti sopprimendo il peso dell'aria, il solo peso delle 49 colonne d'acqua sosterrebbe quel solo della colonna d'acqua della canna, a motivo della ragione 49 ad 1, che sarebbe sempre la stessa. Ora dal modo, in cui è fatta la detta esperienza, l'aria ch'è al di sopra della canna punto non preme detta colonna, perchè l'orificio A è esattamente turato. Però l'aria esteriore, che pesa sulla base DH, non sostiene precisamente che'l peso di essa colonna, quando ella trovasi all'altezza di 32 piedi; ed in conseguenza il peso di quest' aria non differisce da quello delle 49 colonne preso in se stesso, e indipendentemente dall'aria, che peserebbe sopra di lui.

444. Una colonna d'acqua dell' altezza di 32 piedi equilibra con una di mercurio d'egual base, e di 28 pollici d'altezza in circa, come le continue e replicate sperienze il dimostrano; onde una colonna d'aria d'egual base, e che s' estende fino al luogo più elevato dell'aria, equilibra con una colonna di circa 28 pollici di mercurio, e pesa quant'essa.

445. La massa totale dell'aria, che circonda la terra, dicesi *Atmosfera*; ed una colonna di quest' aria, ch' equilibra con una colonna d'egual base, e che contiene 28 pollici di Mercurio, o 32 piedi d'acqua, appellasi *Peso dell' Atmosfera*.

446. L'aria

446. L'aria inferiore, essendo sempre compressa dalla superiore, tende a dilatarsi con una forza uguale a quella, che la comprime; imperocchè la natura di qualunque forza elastica è di resistere quanto viene premuta.

Se l'aria è rinchiusa in un vaso, senza essere nè più nè meno compressa dell'aria esterna, la sua forza elastica è la stessa che se non fosse stata rinchiusa; poichè non si vede cosa potrebbe averla alterata. Onde l'aria rinchiusa preme la superficie interna del corpo, che la rinchiude, nello stesso modo che la detta superficie viene premuta dall'esterna.

447. Sia un vaso AB (*Fig.* 213.) ben chiuso da ogni banda ed avente un'orificio C, a cui sia adattata una chiave R, per la cui apertura entri l'aria nel vaso; alla canna della chiave s'adatti un cilindro cavo, avente un'apertura S col suo coperchio P, ed un pistone IL; e'l tutto sia fatto in modo, che nè'l pistone IL avanzando nel cilindro, nè la chiave quando è chiusa, nè'l coperchio P quando è sopra l'apertura S lascino verun' adito all' aria. Poscia colla chiave chiudasi l'orificio, e si spinga'l pistone, fino a tanto che giunto in H abbia dal cilindro cacciato l'aria ivi rinchiusa; turisi l'apertura S, e schiudendo C si ritiri 'l pistone fino in I, ed allora'l aria del vaso, che trovasi compressa fra i suoi lati, siccome lo sarebbe anche dall'aria esistente sopra'l vaso, si dilata da quella banda del cilindro, ove punto non trova resistenza. Chiudasi di bel nuovo l'orificio C colla chiave, acciò la parte dell'aria, che dal vaso è passata nel cilindro, non possa più rientrar nel vaso, ed aprendo il coperchio P si rispinga'l pistone fino in H per cacciar dal cilindro la porzione d'aria, ch'esso contiene; sturisi un'altra volta G, chiudendo 'l coperchio P, e ritirando'l pistone in I, l'aria ch'era rimasa nel vaso di nuovo si dilata da quella banda del cilindro, ove non trova resistenza. Quindi, se chiudesi colla chiave l'orificio, e che dopo levato'l coperchio P si spinga ancora'l pistone verso H, si caccerà dal cilindro questa seconda porzione d'aria del vaso che v'era passata; e continuando sempre nello stesso modo, è manifesto poter io sì fattamente cavar dal vaso l'aria, che ciò che vi resterà sia di così poco momento da non farne verun caso.

La Macchina ora descritta, e di cui ben se ne scorge l'uso, appellasi Macchina *Pneumatica* o sia *del Voto*, o se pur da lei differisce, egli non è che in averle aggiunte alcune parti necessarie per agevolarne l'operazioni. Mediante questa tal Macchina si

son

son fatte moltissime sperienze, da cui sono derivati varj Teoremi intorno alle proprietà dell'aria, della luce, del suono, ec.

Per esempio, se nel vaso, o Recipiente, da cui s'è fatto uscir l'aria, si lasciano da una medesim'altezza cadere due corpi di gravità disuguale, si sà per isperienza ch'essi discendono colla stessa velocità, e scorrono nel medesimo tempo spazj eguali; e quindi giustamente s'è conchiuso, che la gravità d'un corpo è sempre proporzionale alla sua massa. Poichè supponiamo, che la massa del primo corpo sia doppia di quella del secondo; uguali essendo le velocità di questi corpi, le loro quantità di moto saranno fra se come le lor masse, ed in conseguenza le forze loro saran pure nella medesima ragione: ma le forze motrici dei gravi, che tendono verso 'l centro della terra, altro non sono che le lor gravità; onde le gravità dei due corpi sono fra se come le masse.

Parimente, se nel Vaso, o Recipiente sospendesi un picciolo campanello, il quale, dopo averne fatto uscir l'aria contenuta, si faccia tintinnire, non si sente alcun suono; dal che scorgesi, che 'l suono non perviene alle nostre orecchie che per lo scotimento dell'aria cagionata dal tremore delle parti del corpo, che si batte per far suonare.

Così pure, se ponesi della polvere nel Recipiente, e che dopo averne fatto uscir l'aria, col mezzo d'un vetro ustorio le s'appichi 'l fuoco, si sà per isperienza che i grani di polvere s'accendono con difficoltà, e non fanno verun romore; dal che ben si vede, che gli effetti della polvere nascono dalla forza elastica dell'aria, la qual trovasi dilatata pel calore recatovi.

Potrei a tal proposito annoverare moltissimi altri sperimenti, i quali trovansi in tutte l'Opere di Fisica, ma li passerò sotto silenzio, stimando superfluo il quì riferirli.

448. Poichè la superficie dell'atmosfera è dovunque in egual distanza dal centro della terra, e perchè l'aria inferior' è compressa dal peso della superiore, ne segue, 1°. Che quanto più l'aria inferior sarà distante dal vertice dell'atmosfera, tanto maggiormente ella sarà compressa. 2°. Che i differenti strati d'aria son più, o meno compressi secondo la lor maggiore, o minor distanza dal vertice dell'atmosfera. 3°. Finalmente, che in tutt'i luoghi della terra, che sono a livello, dovrebbe la gravità dell'aria, e per conseguente anche la sua densità, esser' uguale. Ora dunque, se ciò avviene di rado, egli è, perchè 'l caldo e 'l freddo, i quali accrescono e diminuiscon la forza elastica dell'aria, variano secondo i luoghi, le

le ſtagioni, ed i climi, e perchè i vapori e l'eſalazioni, ch'eſcono dalle viſcere della terra, non ſono da per tutto nella ſteſſa quantità. E quindi pure a tali variazioni dee attribuirſi l'origine de' venti.

Se, per eſempio, in certo ſito della terra viene l'aria pel freddo a condenſarſi, ed in conſeguenza a perder parte della ſua forza elaſtica, l'aria circonvicina ſi ſpargerà da quella banda, e ſi ſentirà un vento più, o men gagliardo, a miſura che 'l condenſamento ſarà più o men grande, o ſi ſarà fatto con maggior'o minor preſtezza.

Se una porzione d'aria viene riſcaldata dal Sole, o da qualche altra cauſa, la ſua forza elaſtica, aumentandoſi, s'eſtenderà ſopra le parti vicine, che riſentiranno del vento; ma ſe queſt'iſteſs'aria dopo riſcaldata di nuovo ſi raffredda, la ſua forza elaſtica ſi riſtrignerà, e reſtando le parti vicine ſgravate, il vento ſoffierà ſopra l'aria, che ſi ſarà condenſata.

Quando dalla terra s'alza un gran numero d'eſalazioni, e di vapori acquoſi, ſollevando queſti l'aria, la rendono men peſante: ma ſe dopo innalzati rimangono ſoſpeſi, ſenza più poter nè aſcendere, nè diſcendere, l'aria, che trovaſi carica, diventa più peſante, finchè moltiplicati a ſegno di non poterſi più ſoſtenere cadono, riſolvendoſi in pioggia, o rugiada; dopo di che l'aria diventa più leggiera. Gli ſteſſi venti aſſai contribuiſcono a render l'aria più, o men peſante, ſecondo che ſoffiano d'alto abbaſſo, o da baſſo in alto; e ciò dicaſi pure del caldo, e del freddo.

449. A certezza maggiore, e per meglio conoſcere i differenti gradi di gravità, o denſità, di caldo, o freddo, e d'agitazione, che trovanſi nell'aria, ſi ſono inventati alcuni ſtromenti, dei quali ora parleremo.

Del Barometro.

450. Il *Barometro*, o ſia *Baroſcopio* è un'Iſtrumento, che s'adopera per conoſcere in diverſi tempi le differenti gravità dell'atmoſfera.

Ei ſi coſtruiſce in queſto modo: pigliaſi una canna AB (*Fig.* 214), di cui la lunghezza ſuperi 30, o 31 pol. e l'eſtremità A ſia perfettamente chiuſa; quindi per l'eſtremità B ella ſi riempie di Mercurio; poſcia, col dito chiudendo B, immergeſi la canna verticalmente in un vaſo DE pieno di Mercurio,

rio, e ſturando allora l'eſtremità B, il Mercurio rimane ſoſpeſo a 28 pollici d'altezza in circa, a miſura che maggiore, o minore ſi è'l peſo dell'Atmosfera; tal che le variazioni delle differenti altezze ſon compreſe nello ſpazio di tre pollici, cioè 'l Mercurio non diſcende più baſſo che l' altezza di 26 pollici $\frac{1}{4}$ al di ſopra del Mercurio del vaſo DE, nè aſcende più alto che a 30 pollici $\frac{1}{4}$. Finalmente a lato della ſteſſa canna poneſi una tavola con ſopra varie diviſioni eguali, acciò ſerva a moſtrar le differenze dell'elevazioni del Mercurio.

Siccome i venti di *Nord*, e *Nord-Eſt* condenſano l' aria, non ſolo per la loro freddezza, ma eziandio perchè ſoffiando d'alto a baſſo premono l'aria ſuperior ſopra l'inferiore, il peſo dell'Atmosfera diventa più peſante, ed in conſeguenza il Mercurio nel Barometro s'alza: così, ſiccome per l'ordinario queſti due venti portano il ſereno, dall'elevazione del Mercurio nel Barometro ſi pronoſtica il buon tempo.

All'oppoſto i venti *Sud*, e *Sud-Oveſt* ſoffiano da baſſo in alto, e ſollevan l'aria, il che rende l'atmosfera men peſante, e perciò'l Mercurio nel Barometro s'abbaſſa; nel qual caſo, ſe'l vento continua, o ſe paſſando per l' *Oveſt* volgeſi verſo'l *Nord*, egli per ordinario denota pioggia; ma ſe volgeſi verſo'l *Nord*, paſſando per l'*Eſt*, è ſegno di bel tempo.

Queſti tali pronoſtici non ſono ſempre così infallibili, come il più delle volte ce gl'immaginiamo; e la ragione ſi è, che l'atmosfera può per più cauſe differenti da quelle che noi penſiamo aver la ſteſſa gravità. Il caldo, il freddo, e qualche altra cauſa alterar poſſono la denſità dell'aria inferiore ſenza punto alterare il peſo totale dell'atmosfera: può ſuccedere, ch'una parte dell' aria ſuperiore ſi dilati nella ſteſſa proporzione che l' inferiore ſi condenſa; che quantunque l'aria inferiore ſi dilati e diventi men peſante, la ſuperiore all' oppoſto ſi condenſi, e col peſo della ſua denſità compenſi quello perduto per la dilatazione inferiore: poſſono in oltre i venti, e 'l meſcuglio de' vapori, combinandoſi in varj modi, produrre lo ſteſſo peſo, ec. Perciò quello che dall' uſo del Barometro noi poſſiamo conchiudere ſi è di giugner'a conoſcere le differenti gravità dell' atmosfera in diverſi tempi ſenza giammai conoſcer le vere cauſe producenti queſti cangiamenti. Conviene in fine avvertire che'l Barometro ſia ripoſto in ſito, ove'l grado di caldo, o di freddo ſia dal più al meno ſempre l' iſteſſo; poichè, quantunque'l Mercurio fra tutt' i liquidi ſia quello, che

men di qualunque altro soffra dal caldo, o dal freddo qualche alterazione, tuttavolta non ne va esente, e però è bene avervi considerazione.

Del Manometro, o Manoscopio.

451. Il *Manometro* è un' Istrumento, per cui noi conosciamo le differenti densità dell'aria inferiore.

Potendo l'aria inferior' essere più, o men densa, senza che 'l peso dell'atmosfera diminuisca, è manifesto, non poter' il Barometro servir'ad iscoprire le differenti densità dell'aria inferiore, e però essere stato d'uopo inventare un'altro Istrumento. Ora per costruire questo tal' istrumento pigliasi un gran vaso di rame Q (*Fig.* 215.), da cui si fa uscir l'aria; poi si pesa questo vaso voto, e prendesi una materia assai pesante, p. e. del piombo, la quale pesi quanto'l vaso; quindi sospendesi 'l vaso all'estremità B e'l peso all'estremità A d'una leva AB, le cui braccia AD, DB sieno uguali, e 'l cui centro C di moto sia un poco al di sopra del mezzo D della leva; finalmente al di sopra del centro C di moto mettesi un quarto di circolo graduato MN, il cui raggio sia la linguetta CL della leva; e l'Istrumento è costruito.

Per servirsene, si pesano il vaso e'l peso nell'aria, e se la leva resta in una posizione orizzontale, sarà segno, che l'aria è nel medesimo grado di densità di quando s'è fatto l'Istrumento; ma se'l peso prevale al vaso, l'aria sarà più densa: che se all' opposto il vaso prevale al peso, la sua densità sarà minore, e la linguetta sul quarto di circolo segnerà i gradi di maggiore, o minor densità.

Per rendere di ciò ragione, conviene osservare. 1°. Che'l vaso Q ha sempre maggior volume del peso P, a cagione del vacuo in esso vaso contenuto; ed in conseguenza, a motivo dell'egualità del peso, la gravità specifica di P è maggiore della gravità specifica del vaso. 2°. Che di qualunque densità sia l'aria, il vaso e 'l peso han sempre ciascuno maggior gravità specifica dell'aria stessa. Ciò posto.

Se l'aria diventa più densa di quando s'ha costruito la Macchina, e quando il vaso e'l peso erano in equilibrio, avviene lo stesso che se si tuffassero il vaso e 'l peso in un fluido, ch'avesse minor gravità specifica di essi: ma in tal caso P perderebbe una parte del suo peso uguale a quello d'un volume di esso fluido eguale al suo, e lo stesso avverrebbe al vaso; onde, a cagione del volume del

vaso

vaso maggiore di quello del peso P, detto peso perde meno che 'l vaso, e conseguentemente dee discender verso 'l centro della terra, ed innalzar' il vaso. Posto dunque, che 'l loro centro comune di gravità in questo fluido sia in H, ei discenderà finchè sia nella verticale CH, e perchè non potrà discender più basso, però vi sarà equilibrio, e la leva sarà nella posizione obbliqua SV: così trovandosi allora la linguetta nella posizione CI, la sua estremità I segnerà sul quarto di circolo di quanti gradi l' aria sia fatta più densa.

Se all' opposto l' aria diventa men densa di quando il peso e 'l vaso erano in equilibrio nella situazione orizzontale della leva, avverrà lo stesso, che s'amendue fossero immersi in un fluido, il quale avesse minor gravità specifica di quello, in cui essi eran prima; supponendo dunque, che la quantità specifica di questo fluido fosse a quella del precedente come 1 a 2, i volumi di questo secondo fluido, di cui il peso e 'l vaso occuperebbero il sito, non peserebbon che la metà de' volumi del primo, di cui essi occupavano pure il sito, e conseguentemente il vaso e 'l peso peserebbero questa metà più nel secondo fluido. Donde avviene, che 'l peso del vaso, a cagione del suo volume più grande, diverrebbe altresì maggiore di quello del piombo, e per conseguente lo innalzerebbe; però, ec.

Del Termometro.

452. Il *Termometro*, o *Termoscopio* fu inventato per conoscere i differenti gradi di caldo, e freddo, che son nell' aria.

Sia un vaso sferico AB di vetro (*Fig.* 216.), a cui s' adatti una canna CD saldata colla stessa materia; vi si versi pel foro D dell' acqua, lasciandovi una data quantità d' aria; poi col dito si turi D, e in un' altro vaso EF pieno d' acqua, in cui si sturerà il foro D, immergasi verticalmente la canna. L' aria lasciata nella canna ascenderà nel vaso sferico AB al di sopra dell'acqua; e poichè nel principio ella sarà premuta dai lati del vaso, siccome lo sarebbe dall' aria superiore, così essa sforzerà l' acqua a discendere: ma quest' acqua, discendendo, lascierà alla medesim' aria uno spazio, il quale sarebbe occupato da una massa d' aria esterna maggiore di quella dell' interna; perciò l' aria esterna, avendo allora più gravità specifica dell' interna, ed essendo la stessa dall altro canto caricata dall' aria superiore, impedirà l' acqua di discendere fino al livello

di quella del vaso, e la terrà sospesa a una dat'altezza. Ora, stando la cosa in questo modo, s'avviene, che'l calore riscaldi l'aria, ei dilaterà l'aria interna, e questa trovando resistenza dalla banda dei lati del vaso porterà tutta la sua pressione sull'acqua del vaso e della canna, e la sforzerà a discendere: per lo contrario, se'l freddo viene a condensare l'aria interna, la forza elastica di quest'aria, diminuendo, premerà l'acqua del vaso e della canna men di prima, e però l'aria esterna farà ascender l'acqua. E così noi potremo con tal mezzo conoscere i diversi cangiamenti di caldo e freddo, che succederano nell'aria.

Siccome può accadere, che l'aria diventi più, o men pesante senza tutta via cangiar grado di calore, o di freddo, come s'è osservato parlando del Barometro, così ne segue, che l'Istrumento, il quale noi abbiamo insegnato a costruire, è assai diffettoso in farci conoscere i differenti gradi di caldo e di freddo, a cui l'aria è soggetta; quindi gli Accademici Fiorentini hanno inventato il seguente Termometro, dopo essersi accorti delle condensazioni e dilatazioni, che soffre lo Spirito di Vino dall'azione del caldo e del freddo.

Pigliasi una lunga canna AB (*Fig.* 217.); alla sua estremità B s'adatta un vaso sferico; vi si versa dello Spirito di Vino per l'apertura A; poi mettesi'l globo nell'acqua al ghiaccio, e allora lo Spirito di Vino, condensandosi pel freddo, discende, e s'osserva bene a qual'altezza ei resta, ch'esser dee al di sopra dell'apertura; e quest'altezza, ch'io suppongo esser BH, fa conoscere il più basso grado, a cui discender possa lo Spirito di Vino nel freddo maggiore. Si cava 'l globo fuori dell'acqua, la quale si fa scaldare finchè lo Spirito di Vino sia presso a bollire, e s'osserva l'altezza BT, a cui è asceso lo Spirito di Vino; e siccome questa è la maggiore, a cui innalzar si possa ne'calori dell'Estate, così chiudesi la canna in T, prima che lo Spirito di Vino, raffreddandosi, abbia avuto tempo di discendere; ciò fatto, s'appoggiano il globo e la canna ad una tavola, e accanto ad essa canna fra H e T si segnano più divisioni uguali, che noi chiamiam *Gradi*.

Quando 'l freddo cresca, il liquor si condensa, e discende; per lo contrario, quando cresce il calore, ei si dilata, e conseguentemente s'innalza, perchè allora egli occupa un volume maggiore: così questo Termometro mostra d'esser assai migliore del precedente, ma tutta volta anch'esso ha i suoi difetti. 1°. Perchè quan-

quando fa freddo, il liquore, discendendo, acquista una velocità, ch'accresce il suo grado di compressione; e all'opposto quando fa caldo, la gravità del liquore l'impedisce d'ascender così alto come dovrebbe per la sua rarefazione. 2°. Quando 'l liquore pel freddo si condensa, n'esce dell'aria, e quando esso si rarefa, l'aria che si rarefà v'entra con assai minor velocità di quello n'era uscita, siccome ne fan testimonianza moltissime sperienze, e però il liquore non s'alza quanto farebbe senza dett'ostacolo. Onde nè men da questo Termometro, quantunqu'ei sia 'l migliore che s'abbia potuto immaginare, si può esattamente giudicar de' differenti gradi di caldo e freddo dell'aria.

Dell'Igrometro.

453. L'*Igrometro* fu inventato per conoscere i differenti gradi di secchezza, ed umidità dell'aria: se ne fanno di più sorte, ma a me basterà di riferirne soltanto i due migliori.

Ad un punto fisso E attaccasi una corda (*Fig.* 218.), la quale si fa passare sopra più girelle A, B, C, D, H disposte come nella Figura, e all'estremità di essa corda s'attacca un peso P. Quando l'aria diventa umida, la corda si gonfia e conseguentemente si raccorcia, il che fa ascender' il peso; all'incontro ne' tempi secchi le fibre della corda si stendono, e'l peso discende; così dalle varie distanze del peso P alla girella H si può giudicar della umidità, o secchezza dell'aria. Ma quest'Igrometro, siccome ancora tutti gli altri che son fatti con corde, hanno 'l difetto, che 'l peso tirando sempre la corda ne fa allungar le fibre molto più di quello le faccia raccorciare l'umidità. Però io penso sia meglio servirsi di quest'altro.

Prendasi una Bilancia simile a quella del Manometro (*Fig.* 215.); in B, in vece del vaso Q, si sospenda una spugna, e in A un peso P, che sia con detta spugna in equilibrio. Quando l'aria diverrà più umida, la spugna caricata de' vapori della stessa peserà di più, ed innalzerà il peso; e all'opposto, quando essa diventerà più secca, la spugna diseccandosi diverrà più leggiera, e sarà dal peso alzata; e quindi in amendue i casi la linguetta della Bilancia segnerà sul quarto di circolo MN le differenti umidità, o secchezze dell'aria.

454. AVVERTIMENTO. La cognizione delle varietà dell'aria, e'l modo di giudicar delle stesse possono, quando vi s'aggiungano le spe-

ſperienze, eſſerci di gran lume per ragionar ſenſatamente degli effetti della polvere da Cannone. Ma fa di meſtiere oſſervar bene, che queſte ſperienze ſieno fatte col neceſſario diſcernimento; che vi ſi ſappiano traſcegliere le vere cauſe delle variazioni dell'aria, perchè abbiam veduto eſſervene d'equivoche, e che non ſi attribuiſcano alla polvere e alle Bombe quegli accidenti, che poſſono altronde procedere, e de' quali abbiam ragionato trattando del tiro delle Bombe. In oltre biſogna che le ſperienze, le quali da noi s'ammettono, ſieno coſtanti e regolari, e corriſpondan ſempre; altrimenti i noſtri ſiſtemi non avranno alcuna ſuſſiſtenza, o come ſi ſuol dire fabbricheremo de' Caſtelli in aria.

Si ſtabiliſce, per eſempio, come regola certa e coſtante, ch'una ſteſſa carica di polvere in un medeſimo cannone fa un tiro più lungo innanzi 'l levar del Sole che ſull'ora di mezzo dì. Ciò, diceſi, viene dagli eſperimenti confermato, e la ragione che ſe n'adduce ſi è, che l'aria, eſſendo più dilatata dal calore ſull'ora del mezzo giorno che la mattina, via più reſiſte al moto della palla di cannone, il che io non nego: ma non può ſuccedere che la mattina ſia un gran freddo, il quale condenſi eſtremamente l'aria; che l'atmoſfera ſia carica di vapori e d'eſalazioni, che rendano l'aria più peſante; che ſulle otto, o nov' ore della mattina venga della pioggia, che diminuiſca il peſo dell'aria; e che finalmente ſul mezzo dì il Sole non riſcaldi l'aria che mediocremente? Ora in tal caſo, e in altri quaſi ſimili, l'aria della mattina reſiſterà più alla palla di cannone che quella del mezzo giorno; e però non ſi dee propor la quiſtione come generale, nè riſolverla ſempre ad un modo.

Un Cannone tira più lungi al primo tiro, o dopo molti? Chi dice una coſa, e chi l'altra: ma gli uni e gli altri dicon male, quando non ammettono, riſpondendo, veruna eccezione. Se a forza di tirare il lume talmente ſi dilata, che l'infiamazione della polvere nella camera poſſa in parte ſfuggire da quella tal banda; ſe lo ſcottimento delle parti del metallo fa, ch'ei reſiſta meno a queſt' infiamazione; ſe l'aria eſterna diventa più calda, ec. il tiro della palla ſarà certo minore: ma ſe alcuna di queſte coſe o non è, od è ſoltanto in grado aſſai mediocre, è manifeſto, che la carica più preſto ſi diſeccherà quando 'l cannone ſarà riſcaldato; che per conſeguenza la ſua infiammazione ſi farà con maggior prontezza quando vi s' appiccherà 'l fuoco, e la palla partirà con maggior velocità.

S'è

S'è agitato una quistione intorno alle cariche de' Cannoni, che fan più lunghi tiri. Molti han creduto, che la carica di 9 libbre di polvere per un cannone di 24 d'ampiezza fosse la più adattata; e pare, che questo sentimento s'accordi coll'uso, che da molto tempo ne fanno i Signori dell'Artiglieria, di non battere in breccia che colla carica di 8 libbre pel cannone di 24, e talora con quella di 6, quando'l cannone è riscaldato. Ma M. *de Valiere* Luogotenente Generale dell'Armate del Re, e Direttor parimente Generale delle Scuole d'Artiglieria nella sua Memoria sopra le cariche ed i tiri delle bocche di fuoco stampata nel 1740, e distri-stribuita nelle cinque Scuole d'Artiglieria, distingue tre casi.

Il primo si è, quando l'oggetto, che ci siam proposti di battere, fa poca resistenza per la connessione delle sue parti, come la terra. Il secondo, quando 'l corpo che si vuol distruggere resiste tanto, od anche più per la connessione delle sue parti che per la massa, come le mura; e quando la sua distanza non eccede quella di 300 pertiche. Il terzo finalmente, quando si voglia a tutta forza battere un'oggetto lontano, e farvi breccia.

Il di lui sentimento nel primo caso si è, che s'abbia maggior vantaggio caricando a 6 libbre, ed anche meno: nel secondo, che debba tirarsi colla carica di 8; e nel terzo, che tal volta si adoperi quella di 12.

Nel resto io consiglio i leggitori a far'acquisto di quest'eccellente Memoria, la qual merita d'esser letta con tutta l'attenzione; nè altro io soggiugnerò, perchè tutto quello, ch'io potrei dire dopo un sì gran Maestro, non avrebbe certamente quell'efficacia, che ha la stessa.

Dell' Idraulica.

455. L'Idraulica è quella Scienza, che tratta del moto de'Fluidi, e spezialmente di quello dell'Acque.

456. PROPOSIZIONE LXXVIII. *Se due vasi* AB, ab (*Fig.* 219.), *che si mantengono sempre pieni d'acqua, han dell'aperture* C, e c, *per cui esce l'acqua, le velocità delle colonne* CL, cl, *che scorrono in tempi eguali, sono fra se come le radici quadre dell'altezze, cioè delle distanze* CE, ce *degli orificj alla superficie superiore dell'acqua de'vasi.*

Supponiamo, che gli orificj C, c sieno turati con tramezzi: le pres-

pressioni, che soffriranno detti tramezzi, saranno fra se come i prodotti delle grandezze de' tramezzi per le loro distanze alla superficie superior dell' acqua; e però queste pressioni verranno espresse da $C \times CE$, e $c \times ce$. Supponiam pure, che le colonne d'acqua, le quali usciranno in tempi uguali, sieno i cilindri CL, *cl*: ora questi cilindri, essendo fra essi come i prodotti delle lor basi per l'altezze, saranno $C \times CL$, e $c \times cl$. In oltre le loro altezze CL, *cl* esprimeran le velocità delle colonne d'acqua, che da' due orificj usciranno in tempi eguali; poichè, se l'una di quest' altezze è più lunga dell'altra, manifestamente apparisce ciò non poter' essere se non perchè l'una delle colonne esce più presto dell'altra: ma le quantità di moto di queste due colonne, essendo 'l prodotto delle lor masse per le loro velocità, son' espresse da $C \times \overline{CL}^2$ e $c \times \overline{cl}^2$, e queste quantità di moto sono fra se come le forze che le producono, cioè come le pressioni $C \times CE$, $c \times ce$; onde noi abbiamo $C \times \overline{CL}^2 . c \times \overline{cl}^2 :: C \times CE . c \times ce$, ovvero $\overline{CL}^2 . \overline{cl}^2 :: CE . ce$. Dunque $CL . cl :: \sqrt{CE} . \sqrt{ce}$; e però le velocità CL, *cl* dell' acque, che scorrono dagli orificj C, *c*, sono fra loro come le radici dell' altezze CE, *ce*.

457. *Le colonne d'acqua, che in tempi eguali scorrono per gli orificj* C, c *(supposto sempre che i Vasi si mantengano pieni d' acqua), sono in ragion composta degli orificj, e delle lor velocità.*

Le quantità di moto di queste colonne sono $C \times \overline{CL}^2$ e $c \times \overline{cl}^2$, e le lor velocità sono CL, *cl*; onde dividendo queste quantità di moto per le velocità, i quozienti $C \times CL$, $c \times cl$ saranno i valori delle colonne, ch' escono per gli orificj: ma detti quozienti sono i prodotti degli orificj C, *c* per le velocità CL, *cl*; dunque, ec.

458. *Se l'altezze* CE, ce *son' uguali, e gli orificj disuguali, le colonne d'acqua, ch' usciranno in tempi eguali, sono fra loro come gli orificj* C, c.

Le quantità di moto delle colonne ch' escono dagli orificj sono $C \times \overline{CL}^2$, $c \times \overline{cl}^2$, ed abbiamo $\overline{CL}^2 . \overline{cl}^2 :: CE . ce$; onde supponendo $CE = ce$ avremo $\overline{CL}^2 = \overline{cl}^2$, e $CL = cl$: ma le colonne, ch' escono dagli orificj in tempi uguali, sono come $C \times$

CL,

CL, e $c \times cl$; però, a cagione di CL $=$ cl, queste colonne sono fra loro come C a c.

459. *Se l' altezze* CE, ce *son disuguali, e gli orificj* C, c *uguali, le colonne d' acqua, ch' escono in tempi uguali, sono fra se come le radici dell' altezze.*

Le loro quantità di moto sono $C \times \overline{CL}^2$, e $c \times \overline{cl}^2$; onde dividendo per le velocità CL, cl, i quozienti $C \times CL$, e $c \times cl$ saranno i valori delle colonne, ch' escono dagli orificj. Ora noi abbiamo $C = c$; dunque queste colonne sono fra se come CL, cl, cioè come le lor velocità: ma le velocità sono come le radici quadre dell' altezze CE, ce; però, ec.

460. Se uguali sono gli orificj, e l'altezze CE, ce, le colonne d'acqua ch'escono dagli orificj son parimente uguali; poichè dette colonne sono fra loro come $C \times CL$; $c \times cl$, ovvero come CL, cl, a motivo di $C = c$, ma le velocità CL, cl sono altresì uguali, perch' esse son come le radici quadre dell'altezze CE, ce, che uguali pure si suppongono; onde anche le colonne, ch' escono per gli orificj, son' uguali.

461. *Se disuguali sono gli orificj e l' altezze* CE, ce, *e che non ostante le colonne d' acqua, ch' escono in un medesimo tempo, sieno uguali, le radici quadrate dell' altezze sono fra loro reciprocamente come gli orificj.*

Le colonne d'acqua sono $C \times CL$, e $c \times cl$. Ora, per ipotesi, noi abbiamo $C \times CL = c \times cl$; onde $CL . cl :: c . C$: ma $CL . cl :: \sqrt{CE} . \sqrt{ce}$; dunque $\sqrt{CE} . \sqrt{ce} :: c . C$.

462. NOTA. Per meglio intendere la seguente Proposizione, è necessario tornarsi alla memoria la dimostrazion n°. 116, cioè che due, o più gravi di masse e nature disuguali, cadendo liberamente verso 'l centro della terra, in tempi uguali scorrono spazj uguali: il che viene comprovato dalle stesse esperienze della Macchina Pneumatica da me nell' Areometria riferite; ed in conseguenza, se ciò non trovasi esattamente vero, quando i corpi discendendo verso 'l centro della terra attraversano 'l aria, egli è perchè l' aria via più resiste a que' corpi, la cui superficie a proporzione della massa è maggiore. Ora quindi ne segue, 1°. Che se due corpi, dopo aver cominciato a discendere verso 'l centro della terra, hanno scorso spazj uguali, i tempi da essi impiegati nel discendere sono altresì uguali. 2°. Che le velocità acquistate in fine de' loro spazj saran pure uguali, perchè le velocità acquistate in fine de-

 gli

gli spazj sono sempre fra se come i tempi, o come le radici quadre degli spazj.

Abbiamo pure dimostrato (*N.* 115.), che se un corpo, dopo essere in un dato tempo liberamente discesο verso 'l centro della terra, risale in una direzione opposta a quella della sua gravità colla velocità acquistata in fine della sua discesa, ei s' innalzerebbe all'altezza, da cui è discesο, in un tempo uguale a quello da esso impiegato nel discendere. E quindi ne risulta 1°. che se due corpi, dopo avere discendendo scorso spazj uguali, risalgono colle lor velocità acquistate in fine di detti spazj, s'alzeranno ad altezze uguali in un tempo uguale a quello da essi consumato nel discendere. 2°. Che se questi due corpi risalgono ad altezze uguali, le velocità, con cui essi risaliranno, sarann'uguali, non meno che i tempi impiegati nel risalire. Poich'essi non risalgono a quest'altezze eguali se non perchè hanno delle velocità uguali a quelle, ch'avrebbero acquistate discendendo dall' altezze medesime: ma queste velocità acquistate non meno che i tempi impiegati ad acquistarle son' uguali, come s'è veduto; dunque, ec. Ciò posto.

463. PROPOSIZIONE LXXIX. *Se si mantiene sempre pieno un Vaso* AB (Fig. 220.), *da cui esca l' acqua per un' orificio* C, *la velocità, con cui ella scorre, è uguale a quella, ch' un corpo avrebbe acquistata cadendo dall' altezza* EC *della superficie dell' acqua.*

Se all'orificio mettesi una canna CD, tal che l'acqua non possa uscire che con una direzione verticale e contraria alla sua gravità, si sà per lunga isperienza, che l'acqua, la qual' esce, s' innalza ad un'altezza DF quasi uguale alla CE della superficie dell' acqua, e che questa picciola differenza nell' altezze non proviene se non da ciò che l' aria resiste all' acqua e l' impedisce d' alzarsi come farebbe; il che si può facilmente provare nella Macchina Pneumatica. Ma se dopo essere un corpo liberamente discesο dall' altezza EC risalisse colla sua velocità acquistata, egli ascenderebbe all' altezza DF uguale alla EG; onde (per la Nota precedente), perchè l'acqua e 'l corpo risalirebbono ad altezze uguali, le velocità, con cui essi ascenderebbero, debbon pure esser' uguali, non meno che i tempi, che dai medesimi s' impiegherebbono a risalire.

464. *Quando l' acqua, ch' esce da un vaso sempre ripieno, è costretta a risalire, l' altezza, a cui ella s' innalza, non è se non la metà della lunghezza, che scorrerebbe in una canna* GH *orizzon-*

zontale in un tempo uguale a quello, che da essa s' impiega nel risalire.

Se un corpo, dopo esser disceso dall' altezza EC, risalisse colla sua velocità acquistata, e che la sua gravità non facessegli ostacolo, ei risalirebbe ad un' altezza doppia della DF ovvero CE in un tempo uguale a quello che risalirebbe, come s' è detto parlando del Moto uniformemente accelerato, o ritardato; onde lo stesso avveria pure all'acqua, che risale all' altezza DF, se la gravità non le facesse ostacolo: ora, se in vece della canna CD se ne mette una orizzontale CH, la velocità dell' acqua all' uscir dell' orificio non troverà nella canna l'ostacolo della gravità; e siccome questa velocità è uniforme, perch'è prodotta dalla stessa pressione, così ne segue, ch' ella in detta canna CH farà all'acqua scorrere uno spazio doppio dell' altezza DF in un tempo eguale a quello, che la medesim'acqua impiegherebbe nell'alzarsi a quest' altezza.

465. Mi s' obbietterà forse, risultare da ciò, che quando l'acqua è costretta ad alzarsi perpendicolarmente non dovria per l' orificio C uscir se non la metà di quell'acqua, che uscirebbe nello stesso tempo, se la canna fosse orizzontale; il ch'è impossibile, perchè a motivo della pressione all'orificio C sempre uguale debbono sempre dal medesimo uscir'uguali quantità d' acqua: ma s' avverta, che quando l' acqua è costretta a risalire, e ch'essa perde parte della sua velocità, il getto a poco a poco talmente si gonfia, che apparisce sotto forma d'un cono tronco rovesciato; là dove, quando la canna è orrizzontale, la grossezza della colonna d' acqua, ch' esce, è dovunque la medesima. E quindi si fa una compensazione, perchè ciò ch' una colonna guadagna in lunghezza, l' altra lo guadagna per gli aumenti della sua grossezza.

466. All'opposto, quando l' acqua, ch' esce dall' orificio C, cade perpendicolarmente verso'l centro della terra, ella è assai più densa all'uscir dell'orificio, che quando n'è lontana; e finalmente in una lunga distanza ella dee risolversi in gocciole, mercè che le parti d'acqua, ch'escono successivamente dall' orificio, han la medesima velocità, sussistendo sempre la stessa pressione, per la cura che si ha di mantenere il vaso sempre ripieno. Supponiamo adunque per brevissimo intervallo di tempo, che queste parti d'acqua, cadendo successivamente, non abbiano alcuna velocità; che passino dalla quiete al moto, e che questo moto dopo un dato tempo tutto ad un tratto si fermi. I tempi della discesa delle parti, che sa-

ranno uscite prima dall' orificio, saran più lunghi che quelli della discesa delle parti, che saranno uscite dopo; e siccome i moti di tutte queste parti sarann' accelerati dalle lor gravità, così gli spazj scorsi saranno ancora fra se come i quadri de' tempi, e conseguentemente le differenze di questi spazj andran diminuendo a misura che essi s'avvicineranno all' orificio, nella stessa guisa appunto, che le differenze dei quadrati van diminuendo a misura che gli stessi quadri diminuiscono: così le parti d'acqua più vicine all' orificio saranno fra loro più vicine di quelle, che ne saran più lontane; dunque, ec.

467. PROPOSIZIONE LXXX. *Se un vaso* AB (Fig. 221.) *si mantiene sempre ripieno, e che lungo l'altezza* BH *di detto vaso vi sieno più orificj eguali* C, D, E, F, ec. *per cui scorra l' acqua, le quantità d' acqua, ch' in uno stesso tempo usciran per questi orificj, saranno fra se come l' ordinate d' una parabola* HMB, *il cui diametro sarebbe l' altezza* HB.

A cagione dell' uguaglianza degli orificj, le quantità d' acqua, ch' escono per essi in tempi uguali, sono fra loro come le radici dell' altezze HF, HE, HD, HC: ma l' ordinate della parabola sono pure fra se come le radici delle loro assisse, che son quest' altezze; dunque, ec.

468. *Se in vece degli orificj fatti lungo l' altezza* HB *del vaso, si fa una fessura uguale all' altezza medesima, e che sia da per tutto d' egual larghezza, l' acqua, che uscirà in un dato tempo da questa fessura, non sarà che i due terzi di quella, che n' uscirebbe nel tempo stesso, se tutte le parti dell' acqua scorressero colla velocità espressa dalla radice quadra dell' altezza maggiore.*

Si concepisca, che l' acqua contenuta nel vaso sia divisa in infiniti strati orizzontali, la cui spessezza sia infinitamente picciola; le parti d' acqua, che in uno stesso tempo usciran da ciascuno, saranno come le radici quadre delle distanze da questi strati alla superficie superior dell' acqua, e per conseguente esse saran fra loro come l' ordinate infinitamente prossime, o come gli elementi della parabola. Così la lor somma sarà alla maggiore moltiplicata pel numero de' termini, come 2 a 3, cioè come la somma degli elementi della parabola HMB è all' ultimo massimo elemento BM moltiplicato pel numero de' termini, o per l' altezza BH, ed in conseguenza come la parabola al rettangolo circonscritto BV: ma fra tutte le parti d' acqua, ch' escono in uno stesso tempo per la fessura HB, la maggiore si è quella ch' esce per l' estremità B di

detta

detta fessura, perch'ella scorre colla maggior velocità; dunque la somma delle parti d'acqua, ch'escono in uno stesso tempo, è a quella, che scorre per l'estremità B moltiplicata per l'altezza HB, come 2 a 3.

Ma il moltiplicar l'acqua più bassa, ch'esce per l'altezza HB, non differisce dal supporre uguali a questa tutte l'altre parti d'acqua, che scorrono dai differenti strati dell'acqua medesima; onde le differenti parti d'acqua, che scorrono da ogni strato ciascuna colla sua velocità particolare, non sono che i due terzi delle differenti parti d'acqua, che scorrerebbero da ogni strato ciascuna colla velocità della più bassa.

469. *Se piglinsi due vasi prismatici* AB, ab (Fig. 222.) *d'egual'altezza, e'l cui secondo* ab *abbia la larghezza* mb *della sua base uguale alla sua altezza, dico; che se sopra l'uno de' lati del primo vaso* AB *si fa una fessura verticale* HC, *e sulla lunghezza* mb *della base del secondo una fessura orizzontale* fb *della stessa larghezza, e che i due vasi si mantengano sempre pieni, l'acqua, che uscirà per la fessura verticale* HC *in un dato tempo, sarà a quella, ch' uscirà nello stesso tempo per l'orizzontale* fb, *come 2 a 3.*

Essendo le due fessure egualmente lunghe e larghe, le quantità d'acqua, che si presenteranno per uscire dall'una e dall'altra, saranno eguali: ma tutte le parti della quantità d'acqua, che si presenta per uscire dalla fessura verticale, sono fra se come le lor velocità disuguali, cioè come le radici dell'altezze o delle loro distanze alla superficie superior dell'acqua, o come l'ordinate d'una parabola, le cui assisse son l'altezze medesime; e all'opposto tutte le parti d'acqua, ch'escono per la fessura orizzontale, son'uguali, e possono esser'espresse ciascuna dalla radice dell'altezza HC. Onde tutte le parti d'acqua, che scorrono in un dato tempo dalla fessura orizzontale, equivarrebbero a quelle, che nel medesimo tempo scorrerebbono dalla verticale, se tutte avessero la velocità espressa da $\sqrt{HC}$. Ora (*N.* 468.) s'è veduto, che le parti d'acqua, le quali scorrono in uno stesso tempo per la fessura verticale HC ciascuna colla sua velocità particolare, sono alle quantità d'acqua, che scorrerebbero colla velocità comune $\sqrt{HC}$, come 2 a 3; dunque elle son pure a quelle ch' escono per la fessura orizzontale, come 2 a 3.

470. Quando le parti d'acqua, ch'escono per una fessura verticale BH (*Fig.* 221.), sono fra se come gli elementi d'una para-

rabola, trovasi sempre, ch'una delle loro velocità, essendo moltiplicata pel numero che n'esprime la moltitudine, o per l'altezza BH, ci dà un prodotto uguale alla somma delle velocità, il quale appellasi *Velocità media*; tal che se tutte le parti dell'acqua, ch'esce dalla fessura, scorressero con questa velocità media, la quantità d'acqua, che scorrerebbe in un dato tempo, saria uguale a quella, che scorrerebbe in un tempo uguale, supposto ch'ogni parte d'acqua conservasse la sua velocità particolare.

471. Ora, per rinvenire questa velocità media, piglinsi i due terzi della velocità maggiore $\sqrt{HB}$, poichè la somma delle velocità, ovvero, il ch'è lo stesso, la somma degli elementi della parabola è li $\frac{2}{3}$ del rettangolo circonscritto; ed in conseguenza $\frac{2}{3}BM \times BH$: ma la velocità BM vien'espressa da $\sqrt{HB}$; dunque la somma è $\frac{2}{3}\sqrt{HB} \times BH$.

472. PROBLEMA. *Ritrovar quant' acqua in un dato tempo esca dall'orificio* C *d'un vaso* AB (Fig. 220.), *il quale sia sempre mantenuto pieno d'acqua*.

L'esperienza c'insegna, ch'un corpo, passando dalla quiete al moto e discendendo liberamente verso 'l centro della terra, scorre in un secondo 15 piedi; e noi sappiam pure, ch'un corpo colla velocità acquistata per la sua caduta può in un tempo uguale a quello della sua caduta stessa scorrere uno spazio doppio di quello scorso per detta sua caduta. Però, se supponiamo, che la distanza dall'orificio C alla superficie superior dell'acqua sia di 15 piedi, l'acqua, ch'esce per l'orificio, avrà la medesima velocità, ch'avrebbe acquistata un corpo cadendo da dett'altezza; e siccome questa velocità sarà uniforme, a motivo della pressione sempre uguale, così quest'acqua nella canna CH scorrerà in un secondo uno spazio di 30 piedi, il quale in conseguenza esprimerà la sua velocità uniforme, non meno che la quantità d'acqua ch'uscirà in un secondo, la quale altro non sarà che 'l prodotto della larghezza dell'orificio per lo spazio CH scorso nel secondo medesimo. Ora dunque, per rispondere a chi ricercasse quant' acqua dee uscire in un minuto, o 60 secondi, si dirà per la Regola del Tre: se in un secondo esce una colonna d'acqua avente per base la grandezza dell'orificio e per lunghezza 30 piedi, quante ne usciranno in 60? e troveremo, che in 60 secondi usciran 60 colonne uguali alla prima.

Se l'altezza GE è maggiore, o minor di 15 piedi, p. e. s'ella è di 6, sarà pur vero, che dall'orificio uscirà una colonna di

12.

12 piedi di lunghezza in un tempo uguale a quello, ch' un corpo avrebbe impiegato a discendere da CE. Ma il tempo sarà minore d'un secondo; e per trovarlo, s'osserverà, che i tempi dell' altezze scorse dalla caduta d'un corpo, cominciando sempre dal principio della caduta, sono fra loro come le radici quadre dell' altezze. Quindi dunque per la Regola del Tre si dirà: la radice quadrata dell' altezza 15 è alla quadra dell' altezza *6*, come 'l tempo un secondo, impiegato a discendere dall' altezza 15, è ad un quarto termine, che sarà 'l tempo consumato a discendere dall'altezza *6*. Così noi avremo $\sqrt{15} \,.\, \sqrt{6} :: 1 \,.\, \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{15}}$, e questo quarto termine $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{15}}$, ovvero $\sqrt{\frac{6}{15}}$, o $\sqrt{\frac{2}{5}}$ sarà 'l tempo impiegato a discendere dall' altezza *6*. Dopo di ciò si farà un' altra Regola del Tre, dicendo: se nel tempo $\sqrt{\frac{2}{5}}$ l'acqua, colla velocità uguale a quella ch' un corpo avrebbe acquistata cadendo dall' altezza *6*, scorre 12 piedi, quanti ella ne scorrerà nel tempo 1 secondo? cioè, chiamando x il quarto termine di questa proporzione, s' avrà $\sqrt{\frac{2}{5}} \,.\, 12 :: 1 \,.\, x$, ed innalzando tutt' i termini ai quadrati s' avrà $\frac{2}{5} \,.\, 144 :: 1 \,.\, xx$; il che ci dà $\frac{2}{5}xx = 144$, e quindi $xx = \frac{720}{2} = 360$. Onde $x = 18$ piedi crescenti, e però l'acqua, che uscirà in un secondo, sarà una colonna di 18 piedi di lunghezza crescenti.

473. Se dunque sopra un diametro indefinito AC pigliasi una grandezza di 15 piedi d' A in B (*Fig.* 223.), e che dopo aver' in B alzato una perpendicolare BH doppia di AB coll' ordinata BH e col diametro AB descrivasi una parabola AHL indefinita, si troveranno le lunghezze delle colonne, ch'uscir possono dall' orificio d'un vaso AL mantenuto sempre pieno, in qualunque distanza esso orificio sia dalla superficie superior dell' acqua: se p. e. l'orificio è in T, si tirerà da detto punto l'ordinata TS, e quindi misurandola, ella sarà la lunghezza, o velocità dell' acqua, ch' uscirà dall' orificio T in un secondo, e così negli altri casi; ciò ch'è comodissimo, massimamente quando sopra la carta si costruisce una scala.

474. PROBLEMA. *Dato un vaso, il quale si mantenga sempre pieno d'acqua che scorra per una fessura verticale* AC (Fig. 223.), *trovar' il punto dell' altezza, a cui corrisponde la velocità media.*

Descrivo la parabola, come s' è detto (*N.* 473.); e supponendo, che la retta AC sia l'altezza verticale, o 'l diametro, da

C ti-

C tiro l'ordinata CL, che dinota la velocità maggiore. Ora; per rinvenire la velocità media, prendo i due terzi di essa da C in V, e dal punto V alzando la perpendicolare VM, che sega la parabola in M, conduco dal punto M l'ordinata MP, ch'è la velocità media perch' equivale a $CV = \frac{2}{3}CL$ (*N.* 470.) : così P è 'l punto cercato.

Onde se in P si facesse un'orificio, od una fessura orizzontale della stessa grandezza che la verticale, l'acqua, ch'in un dato tempo scorrerebbe dal dett'orificio, o da essa fessura, equivarria a quella, che nello stesso tempo scorrerebbe dalla fessura verticale.

475. Quando dalla Teorica si passi alla pratica, si troverà sempre della diminuzione, e ciò perchè nelle nostre regole, e ne' Calcoli che facciamo, non computasi lo sfregamento dell' acqua contra i lati del vaso e 'l contorno degli orificj, il quale dee alcuna cosa diminuire la velocità dell' acqua : ma siccome queste perdite non possono esser valutate che colla pratica e coll' esperienza, così noi lasciamo a' Meccanici la cura d'esaminare come abbiano a contenersi. La Geometria (generalmente parlando), concependo le superficie de' corpi come perfettamente piane, ed i corpi come perfettamente omogenei in tutte le sue parti, rimuove da tali soggetti tutte l'irregolarità che in loro si ritrovano ; e siccome gli effetti di quest' irregolarità, che sovente ci sono insensibili, non possono conoscersi che coll' esperienza, così coloro, che si danno alla pratica, debbon porvi tutta l' attenzione, e guardar bene di non istabilire troppo facilmente regole generali. Se io avessi p. e. ritrovato, ch' una superficie d' una data base ed altezza soffre una data diminuzione, non perciò dovrei inferirne ch' una superficie doppia dee sempre soffrire una doppia diminuzione : imperocchè, se ciò fosse, converrebbe, che l'irregolarità delle parti delle due superficie fossero le stesse; il che accade ben di rado, attesochè tutto varia nella natura. E però malissimo ragionerebbe sopra gli effetti di essa chi credesse di poterne parlare coll' ultimo della precisione; imperciocchè si può ben dire dal più al meno, ma voler' in seguela d' alcune sperienze dedur Regole precise e Geometriche, egli è un' ingannar se stesso, e gli altri ancora. Quindi in oltre ne succede, che per troppa pertinacia incorriamo in errori gravissimi, nei quali certo non caderemmo se 'l nostro spirito fosse men sistematico : giacchè le regole della Natura seguono il loro corso, mentre ch' un sistema segue pure il suo; ed in fine, quando ciò che noi supponiamo non conviene col vero, l'uno trovasi maravigliosamente lontano dall' altro.

476. PRO-

476. PROPOSIZIONE LXXXI. *Se un vaso prismatico* AB (Fig. 224.) *pieno d'acqua si vota per un'orificio* E, *il moto dell' acqua, che scorre da quest' orificio, è un moto uniformemente ritardato*.

Si concepisca, che 'l vaso sia segato con piani paralleli alla base, le cui altezze CH, CI, CL, CA sieno come i quadri 1. 4. 9. 16, ec. de' numeri naturali 1. 2. 3. 4, ec. quando l'acqua comincierà ad uscire, la sua velocità, essendo come la radice dell' altezza CA $= 16$, sarà 4; quando 'l livello dell' acqua sarà disceso fino in L*l*, la sua velocità sarà come $\sqrt{CL} = \sqrt{9}$, o come 3, e quando esso sarà in I*i*, la sua velocità sarà come $\sqrt{CI} = \sqrt{4}$, o come 2, e così successivamente: ora i cilindri CD, C*l*, C*i*, C*b*, essendo fra se come le loro altezze a motivo della base comune, sono in conseguenza come i numeri 16. 9. 4. 1, e le lor differenze, cioè i cilindri d'acqua LD, I*l*, H*i*, C*b* son come i numeri 7. 5. 3. 1; dunque, a misura che l'acqua discendendo scorrerà i cilindri LD, I*l*, H*i*, C*b*, ella perderà gradi di velocità uguali, ed in conseguenza quello all' acqua accaderà, che succede ad un corpo, il quale, risalendo con un certo grado di velocità acquistata, perde gradi uguali di velocità, a misura ch' esso scorre degli spazj, i quali fra se sono come i numeri impari presi retrogradando: ora 'l moto di questo corpo è uniformemente ritardato; onde 'l moto dell' acqua d'un vaso, che si vota, è pure uniformemente ritardato.

477. AVVERTIMENTO. S'osservi, che se l'orificio fosse nel fondo del vaso, ei dovrebb' essere assai minor di esso fondo. Poichè, se l'orificio fosse uguale al fondo del vaso, l'acqua caderebbe tutta in una volta, di maniera che le parti inferiori e le superiori avrebbero la stessa velocità; ed in conseguenza questa massa d'acqua seguirebbe la legge ordinaria dei gravi, e in tempi uguali scorreria degli spazj, i quali sarebbero fra loro come i numeri impari 1. 3. 5. 7, ec. che se l'apertura quantunque minore del fondo fosse un pò troppo grande, la colonna d'acqua che sarebbe al di sopra di essa apertura, essendo d'un peso considerabile, s'abbasseria con troppa velocità, e formerebbe una spezie d'imbuto.

478. COROLLARIO. *Se si lascia votare un vaso, che sia pieno, per un' orificio* E, *la quantità d'acqua, che n'uscirà, non sarà che la metà di quella ch' uscirebbe nel tempo stesso, se 'l vaso si mantenesse sempre pieno*.

Quando 'l vaso si vota, la velocità $\sqrt{AC}$, con cui incomincia l'

 acqua

acqua a scorrere, diminuisce ad ogni istante; e all'opposto, quando esso si mantien sempre pieno, la velocità $\sqrt{AC}$, con cui incomincia a scorrer l'acqua, rimane sempre la stessa, ed è in conseguenza uniforme: ora, secondo le regole del moto uniformemente ritardato, una velocità, che diminuisce ad ogni istante, fa scorrere uno spazio, il quale non è che la metà di quello, ch'ella fa scorrere nel medesimo tempo, quando è uniforme. Onde la quantità d'acqua, ch'esce quando si vota'l vaso, non iscorre che la metà dello spazio della quantità d'acqua, ch'uscirebbe nell' istesso tempo, se'l vaso si fosse mantenuto sempre pieno; cioè, se all'orificio s'adattasse una lunga canna, la colonna d'acqua, che troverebbesi in detta canna, quando si fosse votato'l vaso, non avrebbe che la metà della lunghezza di quella che vi si troverebbe, se dal vaso sempre pieno fosse uscito dell' acqua per tutto'l tempo, che si ricercava a votarsi; e per conseguente la prima quantità d'acqua non sarebbe che la metà della seconda.

479. COROLLARIO II. Quindi egli è facile a trovarsi in quanto tempo esca tutta l'acqua d' un vaso, quando ei si vota: non dovendosi cercare che quant' acqua in un secondo uscirebbe dall'orificio, se'l vaso restasse sempre pieno (*N.* 472.), come pure la quantità di essa nel medesimo contenuta; poscia far' il doppio di detta quantità, e dire per la Regola del Tre: se una tal quantità scorre in un secondo quando'l vaso è sempre pieno, in quanto tempo scorrerà il doppio della quantità d'acqua contenuta nel vaso, restando pure il medesimo sempre pieno? e'l tempo che troveremo sarà quello, in cui'l vaso dee votarsi; imperocchè quando'l vaso si vota, non esce, come sopra s'è veduto, che la metà della quantità d'acqua ch'uscirebbe nello stesso tempo, se'l vaso fosse sempre mantenuto ad un'altezza medesima.

Chiamando adunque a la base, b l'altezza del vaso, b la grandezza dell' orificio, m la lunghezza della colonna d'acqua ch'uscirebbe in un secondo se'l vaso fosse sempre pieno, ed x il tempo che si cerca, la quantità d'acqua contenuta dal vaso sarà ab, e'l suo doppio $2ab$, e la colonna d'acqua ch'uscirebbe in un secondo sarà bm: così noi avremo $bm . 1 :: 2ab . x$; il che ci dà $x = \frac{2ab}{bm}$.

Sia a = 10 pollici quadrati, b = 15 piedi, b = 2 pollici quadri, ed m = 30 piedi; ed avremo $x = \frac{2 \times 10 \times 15}{2 \times 30}$ =

$= \frac{20 \times 15}{60} = \frac{300}{60} = 5$ secondi: così 'l vaso si voterà in 5 secondi, e lo stesso dicasi negli altri casi.

480. COROLLARIO III. *Se due vasi* AB, ab (Fig. 225.) *pieni d'acqua si votano per gli orificj* E, e, *i tempi dello scorrimento sono fra loro in ragion composta della diretta delle basi, e di quella dell'altezze, come pure della ragione inversa degli orificj, e di quella delle lunghezze delle colonne d'acqua ch' uscirebbono in un secondo, se i vasi fossero sempre pieni.*

Perchè chiamando A, a le basi; H, h l'altezze; B, b gli orificj; M, m le lunghezze delle colonne ch' uscirebbero in un secondo dai vasi sempre pieni; ed X, x i tempi impiegati dai vasi per votarsi, avremo $X = \frac{2AH}{BM}$ pel tempo impiegato dal primo vaso (*N.* 478.), ed $x = \frac{2ah}{bm}$ per quello impiegato dal secondo; e però $X . x :: \frac{2AH}{BM} . \frac{2ah}{bm} :: \frac{AH}{BM} . \frac{ah}{bm}$, e moltiplicando i termini dell' ultima ragione per BM, e bm, avremo $X . x :: AH \times bm . \times ah\, BM$: ma la ragione $AH \times bm . ah \times BM$ è composta delle ragioni A, a; H, h; b, B; ed m, M. Dunque, ec.

Se $A = a$; dunque $X . x :: H \times bm . h \times BM$, cioè, se le basi dei due vasi son' uguali, i tempi degli scorrimenti sono fra loro in ragion composta della diretta dell'altezze H, h, e dell' inverse b, B degli orificj, ed m, M delle lunghezze.

Se $A = a$, ed $H = h$; dunque $X . x :: bm . BM$, cioè uguali essendo le basi ed altezze, dei vasi i tempi degli scorrimenti sono in ragion composta dell' inversa b, B degli orificj, e della m, M delle lunghezze: ma s'avverta, che in tal caso s'avrà sempre $M = m$, a cagione dell'altezze uguali H, h; però $X . x :: b . B$, cioè i tempi sono fra se, a motivo delle basi ed altezze uguali, in ragione inversa degli orificj.

Se $H = h$, e per conseguente $M = m$; dunque $X . x :: A \times b . a \times B$, cioè uguali essendo l'altezze e gli orificj, i tempi degli scorrimenti sono fra loro in ragion composta della diretta delle basi, e dell' inversa degli orificj.

Se supponiamo $H = h$, e $B = b$, il che ci dà $M = m$, avremo $X . x :: A . a$; cioè uguali essendo l'altezze e gli orificj, i tempi degli scorrimenti sono fra se in ragione delle basi.

481. PROBLEMA. *Dato 'l tempo, in cui votasi un vaso, conoscer le quantità d'acqua, che n'escono ad ogni momento.*

Supponiamo, che 'l vaso DC (*Fig.* 224.) si voti in 4 secondi: divido la sua altezza in quattro parti, talmente che l' altezze CH, CI, CL, CM sieno fra loro come i quadri 1. 4. 9. 16 de' numeri 1. 2. 3. 4; e concependo, che l' acqua del vaso sia divisa da linee parallele alla base che passano per i punti di divisione, i cilindri d' acqua DC, *l*C, *i*C, *b*C saran fra se come i quadri 16. 9. 4. 1, e le lor differenze, cioè i cilindri DL, *l*I, *i*H, *b*C saranno come i numeri impari 7. 5. 3. 1, ed esprimeran le quantità d' acqua, ch' usciranno in ciascuno dei quattro secondi. Poichè la velocità, con cui l' acqua comincia a scorrere, essendo uniformemente ritardata durante 'l suo moto, è manifesto, che gli spazj scorsi dall' acqua nei quattro tempi uguali, componenti la durata del suo moto, debbono esser fra loro come i numeri 7. 5. 3. ed 1.

Delle Macchine Idrauliche.

482. Le Macchine Idrauliche servono per far' ascender l'acqua in que' luoghi, dove non nè può esser naturalmente.

Essendo l' acqua nel numero dei gravi, giammai ella s' innalza al di sopra della sua sorgente; ma se dopo esser discesa per qualche tempo trova un' ostacolo, che l' impedisca di discender più oltre, e d' orizzontalmente dilatarsi da ogni banda, la sua velocità acquistata la fa risalire ad un' altezza, uguale a quella da cui ella è discesa, in un tempo uguale a quello ch' essa impiegò nel discendere.

Per far risalire l' acqua col mezzo della sua velocità acquistata, ella si fa scorrere dalla sorgente A (*Fig.* 226.) per una canna AB cilindrica o prismatica, perpendicolare od inclinata all' orizzonte, la quale poscia s' incurva in modo, che l' acqua non possa uscire per l' apertura D che con una direzione verticale, od inclinata all' orizzonte; e così sono i *Getti* d' acque. Che se fra 'l luogo M (*Fig.* 227.), a cui si vuole innalzarla, e la sua sorgente A trovasi un vallone ABC, si fa prima discender la canna AB fino in fondo del vallone; poi ella s' incurva fino in C, dove se n'adatta un'altra CM, e mediante questa l'acqua risalirà in M, supposto che M non sia più alto di A.

S' avverta bene, che in tali acquidocj, non meno che nei Getti, l' acqua

l'acqua non risale del tutto così alta quant'è discesa; e ciò deriva dallo sfregamento della stess'acqua contra i lati delle canne e dalla resistenza dell'aria, che diminuiscono la velocità, con cui l' acqua senza questi ostacoli risalirebbe.

Per quanto pulite e liscie ci sembrino le superficie interiori delle canne, di cui ci serviamo per condur l' acque, elle tuttavolta son sempre alcuna cosa ineguali e ruvide, e questa loro inegualità e ruvidezza, qualunque si sia, a guisa di tanti piccioli piani inclinati rallenta il moto dell'acqua; sapendosi già, che i gravi discendono con minor velocità lungo i pian'inclinati di quello se discendessero per una direzion verticale. Quindi, pervenuta l'acqua fino al basso della canna, la sua velocità acquistata non è così grande, qualmente sarebbe stata se incontrato non avesse questi piccioli piani; ed in conseguenza non è meraviglia, s'ella non può alzar l' acqua alla medesim' altezza, da cui è discesa. In oltre, risalendo l' acqua, l' aria, a traverso cui ella passa, opponesi al suo passaggio, e anch' essa diminuisce il di lei moto. Ora, a fine di poter'esattamente e geometricamente giudicare di quanto la velocità dell'acqua si sia rallentata, converrebbe poter'iscoprire quale sia la diminuzione di velocità cagionata dalle picciole inegualità delle superficie interne delle canne, e quella causata dalla resistenza dell'aria; il che per varie cagioni mi pare assai difficile, o per meglio dire impossibile, quando anche si ricorresse all'esperienza. Imperocchè 1°. la Geometria non deduce conseguenze certe se non quando ella conosce i rapporti delle superficie, dei piani, delle lor dimensioni e degli angoli da esse formati; il che non puossi conoscere in queste picciole inegualità, le quali trovansi nelle superficie interne delle canne, perchè secondo la figura elle variano e non sono dovunque nello stesso numero: così lo sperimento fatto in oggi non corrisponderà a quello di domane, perchè lo sfregamento delle Macchine un pò vecchie è notabilmente minore di quello delle nuove; nè la sperienza fatta rispetto ad una data superficie può servir di regola per un'altra superficie più o men grande se non nel caso che tutte l'inegualità si supponessero d'una stessa natura, il che sarebbe evidentemente falso. 2°. l'aria resiste più, o meno secondo le differenti alterazioni, alle quali ella è soggetta, e di cui abbiam ragionato sopra; e però le perdite fatte dalla velocità dell'acqua non sono sempre le stesse. Ma supponiamo, che col mezzo d'un Barometro, d'un Termometro, d'un' Igrometro, ec. rendasi fattibile d'esattamente determinare gli effetti dell' aria

se-

secondo che variano le circostanze, ci resterà sempre a sapere quale sia la resistenza dell'aria al primo istante, in cui l'acqua comincia ad alzarsi. S'è dimostrato, ch'in fine de' tempi 1. 2. 3. 4, ec. le resistenze sono fra se come i quadrati delle velocità rimanenti; onde, per trovare la somma delle resistenze in fine d'un tempo determinato composto di piccioli tempi eguali, è di necessità conoscer la prima. Ora in qual modo poter ciò ottenere? E' forse facile chiudere una canna precisamente in fine d'un dato tempo, in modo che l'acqua, ch'esce, non sia nè più nè men del bisogno? ma posto eziandio che se ne venga a capo; ed in qual maniera si potrà mai discernere nella diminuzion d'acqua, che si troverà in fine di quest'istante, quale sia la parte di diminuzione cagionata dallo sfregamento, e quella causata dalla resistenza: che se ciò pure rinvenir si potesse in un caso particolare, la qual cosa io stimo difficilissima, potrebbonsi perciò dedur conseguenze certe per i casi tutti in generale? Queste e molte altre considerazioni, ch'io potrei aggiugnere, dimostrano qual fede si possa prestare alle Regole dateci da alcuni intorno agli sfregamenti, e alla resistenza dell'aria. I calcoli, su cui essi han fondato queste regole, saranno sempre ammirabili e certi, quando s'ammettano l'ipotesi da loro fatte: ma siccome nella Natura niente v'è di fisso, e la combinazione delle cose variando dall'uno all'altro istante, così le supposizioni fatte nei ricinti de' Gabinetti di rado s'accordano con ciò che realmente succede. Quindi li calcoli rendonsi infruttuosi egualmente che la fatica di chi s'impiegò in farli.

Le Macchine Idrauliche, che s'adoperano per alzar l'acqua al di sopra della sua sorgente, sono di due sorte. Alcune innalzano l'acqua rinchiusa in un vaso nello stesso modo che s'alza un peso, come avviene quando ci serviamo delle secchie per trar l'acqua da un pozzo mediante una girella, ch'attaccasi alla circonferenza d'una gran ruota, di cui una parte è tuffata nell'acqua, acciò le secchie trovandosi abbasso della ruota si riempiano, e trovandosi in alto possano votarsi in un canale, ec. Il calcolo di queste Macchine si fa nello stesso modo, che se lor s'attaccasse un peso uguale a quello dell'acqua da esse innalzata; e quindi nulla io soggiugnerò dopo ciò che ho detto sopra intorno a tali sorte di Macchine. Altre poi alzano l'acqua col mezzo dell'aria, e sono assai più ingegnose delle precedenti. Gli Antichi se ne servivano egualmente che noi: ma siccome eglino non avean alcuna cognizione della gravità e forza elastica dell'aria, così nulla hanno scritto a questo proposito

posito che pienamente soddisfi; e le lor Macchine niente aveano che fare con quelle de' nostri tempi, che son molto più perfette. Intanto io tratterò d'alcune delle più semplici; che dalla cognizione di queste si potrà poi agevolmente giudicare cosa debbasi pensar dell'altre, le quali non sono che differenti combinazioni delle stesse Macchine.

Del Sifone.

483. Il Sifone è un' Istrumento, del quale noi ci serviamo per far uscire il liquore d'un vaso per l'alto senza por mano al vaso. Se ne fanno in varie guise; ma il più usitato è quello che si fa con una canna ABC (*Fig.* 228.), di cui l'un braccio AB è maggiore dell'altro BC. Per servirsene, si tuffa 'l braccio BC nel liquore del vaso MN, che si vuol votare; s'applica la bocca all'estremità A dell'altro braccio AB, e succiasi finchè 'l liquore venga a bagnar le labbra; poi ella si ritira, e 'l liquore del vaso scorre per l'apertura A.

La ragione si è, che succiando si dilata la capacità del petto in modo, ch' una parte dell'aria ch'era nel Sifone viene a passar ne' polmoni, e quindi ciò che resta trovandosi dilatato ha minor forza elastica della colonna d'aria, che pesa sulla superficie del liquore contenuto nel vaso. Così detta colonna fa ascender l' acqua, la quale giunta in B discende pel suo proprio peso lungo 'l braccio BA; e ciò continua, finchè 'l liquore contenuto nel vaso trovisi al di sotto dell'orificio C dell'altro braccio BC.

Si dirà forse, che la colonna d'aria corrispondente all'apertura A, equilibrando con quella che pesa sulla superficie del liquore contenuto nel vaso, dee impedir'all'acqua ch' è nel braccio AB di scorrere: ma è d'uopo avvertire, che 'l braccio AB, essendo sempre più lungo del braccio BC, contiene una maggior quantità d'acqua di esso braccio BC; e ch' in conseguenza la colonna d' aria corrispondente all'apertura A, avendo una maggior quantità di acqua a sostenere che la colonna d'aria, la quale fa risalire l' acqua per l'altr' apertura, trovasi più debole, e dee lasciar all' acqua libero il passaggio.

Avvertasi, che se nel braccio BC la parte BE, che trovasi al di sopra del livello dell'acqua contenuta nel vaso, non fosse minore di 32 piedi, giammai l'acqua scorrerebbe per l'altro braccio; perchè supposto pure, che si potesse succiando trar tutta l' aria

aria esistente nel Sifone, la colonna d'aria, ch'è al di sopra della superficie del vaso, non potrebbe alzar l'acqua che a 32 piedi d'altezza: ma nel Sifone rimanvi sempre un pò d'aria, la quale benchè dilatata ha sempre una certa forza, ch'opponesi all'azione della colonna esterna. Onde questa colonna esterna non può alzar l'acqua nè meno fino a 32 piedi; e quindi scorgesi l'inganno dell'antico Matematico Erone, il quale dicea che con un solo Sifone ei avria fatto passar l'acqua al di sopra della più alta montagna.

484. Possiamo servirci del Sifone senza che sia bisogno di succiare, e ciò si fa in molte guise, come ora vedremo.

S'adatta primieramente un Sifone al lato MS d'un vaso MN(*Fig.*229.), in modo che'l braccio minore BC sia nel vaso, il maggiore AB di fuori, e'l vertice B sia men'alto del vertice M del vaso; poi si versa dell'acqua nel vaso, e finattanto che quest'acqua non ascenderà fino in B, ella entrerà nel braccio BC e si metterà in equilibrio, o a livello coll'acqua contenuta nel restante del vaso, e per conseguenza ella non discenderà pel braccio BA: ma l'acqua del vaso, dopo giunta ad un'altezza maggiore di BS, passerà per BC, e sforzata dal peso di quella che resterà nel vaso incomincierà a scorrere per BA, e non cesserà che quando l'acqua del vaso troverassi più bassa dell'apertura C del braccio BC; perciocchè se l'acqua, che sarà passata nel braccio BA, potesse scorrere per A, e separarsi da quella ch'è in BC, fra dette due acque troverebbesi un'aria, che sempre più si dilateria a misura che discenderebbe l'acqua del braccio BA. Però quest'aria dilatata, avendo minor forza di quella che pesa sulla superficie dell'acqua del vaso, di bel nuovo sforzerebbe l'acqua a scorrere pel braccio BA.

Tali Sifoni destramente nascosti ne' lati d'un vaso, e disposti in varie forme, producono graziosissimi effetti, e molto sorprendenti l'animo di coloro che non ne conoscono la causa.

485. Sia un gran vaso, o serbatojo AC (*Fig.* 230.) pieno d'acqua: dispongo molte casse MN, RS, ec. orizzontalmente ed a livello del bacino; ai fondi di dette casse adatto delle canne DE, FH, ec. aventi delle chiavi alle loro estremità E, H; adatto pure al di sopra di esse casse delle canne LX, PQ, ch'entrano in altre casse TZ, YV disposte in modo, che le più distanti dal bacino AG sieno più alte di quelle, che ne son più vicine; e l'estremità X, Q delle canne LX, PQ debbono bene entrar' innanzi nelle casse TZ, YV, ma non interamente fino alla superficie superiore. Alla cassa TZ adatto una canna *ab*, che tuffi nel vaso AB; ed entro nella

stessa

stessa cassa metto un'altra canna *bf*, la cui estremità *f* tuffi nella cassa medesima.

Costruita questa Macchina, riempio d'acqua le casse inferiori MN, RS col mezzo d'un'apertura, ch'è sopra la loro superficie superiore, e che poscia chiudo in modo che non possa entrarvi l'aria; giro la chiave E, e schiudo l'apertura; ed a misura che l'acqua della cassa MN comincia a discendere ed a scorrer per E, l'aria, che trovasi nelle casse superiori e nelle loro canne di comunicazione coll'inferiori, dilatasi sempre più, e la sua forza elastica s'indebolisce. Quindi l'aria, che pesa sulla superficie dell'acqua del vaso AC, diventando la più forte, fa ascender l'acqua per la canna *bc*, e la cassa TZ se ne riempie. Chiudo col mezzo della chiave E l'apertura, prima che scorra tutta l'acqua della cassa MN; perchè se ciò accadesse, l'aria, che per E rientrerebbe nelle canne ED, LX, trovandosi tanto forte quanto quella esistente sulla superficie del vaso AC, impedirebbe all'acqua di continuar'ad ascendere nella canna *ab*. Giro la chiave H, e schiudo l'apertura; ed incominciando l'acqua della cassa RS ad uscire, l'aria della cassa superiore YV si dilata e perde parte della sua forza elastica: così l'acqua della cassa TZ ascende per la canna *fb*, e scorre nella cassa YV; e continuando a dispor delle casse come sopra, potrei agevolmente far'ascendere l'acqua al di sopra del serbatojo AC a qualunque altezza, quando tuttavolta le canne *ba*; *fb*, ec. fossero ciascuna per le sopr'accennate ragioni d'un'altezza minore di 32 piedi.

Questa tal Macchina serve a far vedere, come colla sola dilatazione dell'aria si possa alzar l'acqua a qualunque altezza; ma non perciò ella è delle più comode da mettersi in uso.

Della Fontana di Erone d'Alessandria.

486. Questa Fontana fa ascender l'acqua colla sola compressione dell'aria; e si costruisce nel seguente modo.

AB (*Fig.* 231.) è un gran vaso, il cui coperchio superiore AEFC è concavo; HL un tramezzo, o diaframma, che sega il vaso in due parti; FS una canna adattata al fondo concavo AEFC, che passa a traverso il diaframma HL, e discende ad una picciola distanza dal fondo MB; PR un'altra canna adattata al diaframma HL, ch'entra pochissimo nella parte inferiore HB, ed ascende nella superiore AL ad una picciola distanza dal coperchio AEFC;

TX finalmente un'altra canna adattata al coperchio AEFC, e che discende nella cavità superiore AL fino ad una picciola distanza dal diaframma HL.

Per servirsi di questa Macchina, si versa per l'orificio T della canna TX dell'acqua, finch'ella si senta a scorrere nella cavità inferiore HB per l'orificio P della canna PR; poi turasi l'orificio T, e si versa dell'acqua per l'orificio F della canna FS: Ora quest'acqua, ascendendo a poco a poco nella cavità HB, comprime l'aria esistente in questa cavità, e quella rimasta nella cavità AL; tal che, quando essa è giunta ad una data altezza YZ, l'aria compressa la tiene in bilancia, e l'impedisce d'ascender più alto. Ma quest'acqua, se in tutta la capacità AB non trovasse ostacolo, ascenderebbe fino in F. Onde l'aria compressa da quest'acqua comprime altresì l'acqua esistente nella capacità superiore AL con una forza atta ad innalzarla ad un'altezza uguale a ZF. Così, se si stura l'orificio T, la colonna d'aria esterna, che porta sopra quest'orificio e che sarebbe in equilibrio coll'aria interna se non fosse compressa, cederà alla forza di quest'aria compressa, e l'acqua della capacità superiore AL zampillerà per l'orificio T ad un'altezza uguale a ZF; il che durerà, finchè l'acqua della capacità AL trovisi più bassa che l'estremità X della canna TX. Imperocchè, quantunque possa l'aria compressa, a misura che l'acqua della cavità AL zampilla, maggiormente dilatarsi in questa stessa cavità, ciò non ostante l'acqua, che sempre si verserà per l'orificio F della canna FS, via più ascenderà nella cavità inferiore HB; il che terrà l'aria delle due cavità nel medesimo stato di compressione.

Della Tromba Succiante.

487. La tromba Succiante è un cilindro cavo AB (*Fig.* 232) avente alla sua base LB una canna CD, a cui evvi una *Valvula*, o coperchio CH, che s'apre entro 'l cilindro, e che riserrasi pel suo proprio peso; adattasi a questo cilindro un pistone MVRZSX, a cui v'è pure un'altra valvula EF, che s'apre di basso in alto, e che pel suo proprio peso si riserra.

Quando si vuole servirsi di questa Macchina, s'immerge la canna CD verticalmente nell'acqua; s'affonda il pistone fino in L, e l'aria compresa fra 'l pistone e 'l fondo LB della Tromba, ritrovandosi sempre più compressa a misura che 'l pistone discende, si fa libera l'uscita

ta per la valvula EF, la quale si riserra dopo giunto il pistone in L. S'alza il pistone, e siecome a misura ch'ei s'allontana dal fondo lascia un vacuo, in cui non trovasi che pochissim'aria estremamente rarefatta, la quale non potrebbe esser' in equilibrio con quella della canna, così ella dilatasi, aprendo la valvula CH, che dopo questa dilatazione di nuovo si chiude pel suo proprio peso; tuttavolta l' aria dilatata della canna non equilibrando più con quella, che pesa sulla superficie dell' acqua, è manifesto, che l' acqua dee ascendere finattanto che l' aria dilatata sia compressa in modo da poter' essere seco lei in equilibrio. S' affonda un' altra volta il pistone fino in L, e l'aria compresa fra detto pistone e'l fondo LB, trovandosi di nuovo compressa, si fa ancora libera l'uscita per la valvula, la quale si riserra dopo giunto il pistone in L; e perciò, ritirando'l pistone, l' aria ch'era restata nella canna si fa libera l' uscita per la valvula CH, e l'acqua ascende nel cilindro fino ad una data altezza, a cui giunta che sia equilibra coll'aria dilatata ch'essa condensa, e la valvula CH si riserra. S'affonda ancora il pistone fino in L, e per la valvula EF, che si riserra, esce non solo l'aria ch'era restata, ma eziandio l' acqua ascesa nel cilindro; e continuando a rilevare e ad affondar successivamente il pistone, si farà ascender dell'acqua al di sopra della valvula EF quanto alto si vorrà, ed in oltre si farà la stessa scorrere per una canna PQ adattata orizzontalmente al vertice del cilindro AB.

Ma conviene avvertire, che l'altezza della canna CD al di sopra dell' acqua che si vuol'innalzare sia minor di 32 piedi; poichè l' aria, che preme la superficie dell'acqua, non può sollevar la stess' acqua se non se a dett' altezza, ed appunto col mezzo d' una di queste Trombe succianti fu scoperta questa tal proprietà dell'aria. E' opinion comune, che'l Giardiniere di Galileo irrigasse il suo giardino mediante una Tromba, la quale logoratasi dopo alcuni anni, ne fece costuir'un' altra; e sia a caso, o ad arte la lunghezza della canna di succiamento fu fatta maggior di 32 piedi: ora nulla dico dello stupore del Giardiniere, quando credendo di far colla stessa risalir l' acqua trovò vano ogni sforzo da lui a tale oggetto eseguito. Sorpreso adunque da così inopinato avvenimento, corse subito ad avvertirne il Padrone, quasi d' un prodigio nella di lui cosa accaduto. Ma Galileo, il qual'era egualmente profondo Fisico che peritissimo Geometra, avvezzo a ricercar le cause degli effetti i più sorprendenti conobbe benissimo, che non v'era che l'aria, la qual potesse far risalire l' acqua in una Tromba; e quindi agevolmente

 te

te conchiuse, che in tanto l'acqua non risaliva che a 32 piedi; perchè una colonna d'aria, avente ugual base di quella dell'acqua ed eguale altezza di quella dell'atmosfera, pesava quanto una colonna d'acqua d'egual base, e di 32 piedi d'altezza. Le sperienze ch'ei dopo ne fece, e moltissime altre ancora posteriori hanno stabilito per regola certa ed incontrastabile, ciò che prima egli non risguardava che come una semplice conghiettura.

Un'altra cosa ancora è necessario osservar circa le trombe, di che parliamo, ed è: che le commessure delle valvule non sieno fatte con metalli soggetti alla ruggine, nè in modo che la feccia dell' acqua entri nelle lor giunture; perchè in amendue i casi le dette commesure non farebbero la loro funzione che con difficoltà, e tal volta ancora essa lor sarebbe impedita; e quindi s'ha sempre creduto che le valvule migliori fossero quelle costruite nel seguente modo.

Supponiamo, che'l circolo HL (*Fig.*233.) rappresenti 'l fondo d' una tromba, o d'un pistone, e che'l circolo NCR ne rappresenti l'apertura. Pigliasi un pezzo di cuojo MNCRS, la cui parte NCR copra esattamente, ma senza cadere, l'apertura, e l'altra MNRS sia bene attaccata sul circolo HL. Così la linea NR di questo cuojo, che dee esser flessibile, serve di commesura, e siccome il peso dell' acqua sopra la parte NCR potrebbe farla piegare, così al di sotto di essa vi si mette una piastra di ferro, o rame della stessa grandezza.

Tutte le valvule, che si han voluto sostituire a questa, hanno il più delle volte riuscito male, quantunque la loro invenzione a prima vista paresse molto ingegnosa.

Della Tromba Comprimente.

488. La Tromba Comprimente non differisce dalla Succiante se non in quanto 'l pistone MNVXT (*Fig.* 234.) entra nella Tromba pel basso, e 'l diaframma PL è circa 'l mezzo. Quando si tira 'l pistone da P in M, l'acqua, ch'è per di sotto, apre la valvula FH, ed entra nella Tromba; e quando ei si rispigne da M in P, la valvula FH si riserra, e l'acqua entrata al di sopra del pistone, trovandosi compressa a misura che 'l detto pistone ascende, apre la valvula RS, ed entra nella cavità AL; dopo di che RS si torna di nuovo a serrare. Quindi è, che continuando a rilevare e ad abbassar successivamente il pistone, si farà ascender quant' acqua si vorrà.

Dell'

Dell' urto de' Fluidi contro i Corpi solidi.

489. Quando un corpo solido ABCD (*Fig.235.*) ne urta un'altro EF, conviene rifletter' alla massa, alla velocità, è alla sua direzione: il prodotto della massa per la velocità è la forza del corpo ABCD, il quale urta con tutta la sua forza, se la direzione OR del suo moto è perpendicolare al corpo urtato EF; e con forza minore, se questa direzione è obbliqua.

Quanto all' ampiezza della faccia BC, ch' urta il corpo EF, poco ne cale, ch' ella sia più, o men grande; perch' essendo tutte le parti del corpo ABCD strettamente insieme congiunte, il loro sforzo comune si riunisce al loro centro di gravità O, tal che EF riceve lo stesso urto che se tutte le parti del corpo ABCD il toccassero.

490. Ma lo stesso non accade nell' urto de' fluidi contra i corpi solidi; imperocchè gli stessi, non avendo tutte le lor parti strettamente insieme congiunte, non hanno alcun centro di gravità, quando'l fluido non sia riposto in un vaso ben chiuso, e poi lasciato cadere verso'l centro della terra: così un solido urtato da un fluido non riceve ad ogni istante che l' impressione delle molecule o sia particelle d' acqua, che'l toccano; e però in tali urti conviene riflettere alla direzione, alla grandezza della superficie urtata, ed alla velocità. Quanto più grande è la superficie urtata, essendo la velocità l' istessa, tante più sono le parti d' acqua tangenti 'l corpo urtato, e quanto maggior' è la velocità, istessa essendo la superficie, tante più ancora sono le parti, che in un dato tempo urtano detta superficie. Supponiamo, p. e. che due fluidi della stessa natura MABN, *mabn* (*Fig.236.*) urtino le superficie eguali AB, *ab* con velocità disuguali, in modo che la velocità del primo sia, p. e. doppia di quella del secondo: le molecule d' acqua del fluido MABN faranno adunque in un secondo un cammino doppio di quello che faran le molecule del fluido *mabn*, e per conseguente in uno stesso tempo, cioè in un secondo il numero delle molecule, ch' urteranno la superficie AB, sarà doppio del numero di quelle, ch' urteran la superficie *ab*; donde avviene, che uguali essendo le superficie, i volumi de' fluidi, ch' urtano in un medesimo tempo, sono fra se come le lor velocità.

491. PROPOSIZIONE LXXXII. *Se due fluidi d' una stessa natura urtano con una medesima direzione, o sotto un' istesso angolo due piani disuguali* A, B, *le forze, con cui questi piani son' urtati, sono fra se come i piani.*

I due fluidi, essendo d'una stessa natura, sono eziandio egualmente densi; e supposto che le velocità come anche le direzioni sieno uguali, non può la differenza degli urti derivare che dalla differenza dei volumi, ch'urtano. Ora, a motivo dell'uguaglianza delle velocità, la quantità di molecule, ch'urtano il piano A, è a quella delle molecule, che nello stesso tempo urtano il piano B, come A a B (*N.*490.); onde la forza dell'urto del fluido contra'l piano A è a quella dell'urto del fluido contra 'l piano B, come A a B.

492. *Se le velocità son disuguali, e i piani uguali, le forze degli urti sono fra loro come i quadri delle velocità.*

Perocchè in quest'ipotesi le quantità di molecule, ch'urtano nello stesso tempo, sono fra lor come le velocità (*N.*490.); perciò le forze, cioè le moli, o sia masse, o quantità di molecule moltiplicate per le loro velocità sono fra se come le velocità moltiplicate per le lor velocità, cioè come i quadri delle velocità.

493. Posto sempre che i fluidi sieno della stessa natura, e ch'urtino colla medesima direzione, se chiamiamo 'l piano A = A, il piano B = *a*, la velocità del primo fluido = V, quella del secondo = *u*, la forza dell'urto del primo fluido contra 'l piano A = F, quella del secondo contra l'altro piano = *f*, e che si faccia la ragione A × VV, *auu*, ch'è la composta della ragione A, *a* de' piani e della VV, *uu* dei quadri delle velocità, avremo in tutt' i casi F. *f* : : A × VV. *auu*.

Perchè, se V = *u*, l'analogia F. *f* : : A × VV. *auu* si cangerà in F. *f* : : A. *a*, siccome s'è veduto sopra n°. 491.

Se A = *a*, noi avremo F. *f* : : VV. *uu*, siccome sopra s'è veduto n°. 492.

Se A = *a*, ed V = *u*; dunque A × VV = *auu*, e però F = *f*.

Se finalmente tutto è disuguale, noi avremo F. *f* : : AVV. *auu*, cioè le forze degli urti sono in ragion composta della ragione dei quadri delle velocità, e di quella de' piani; perchè, a motivo dell' inegualità dei piani e delle velocità, i volumi, o le masse che urtano sono in ragion composta della ragione de' piani e di quella delle velocità, cioè questi volumi sono fra loro come AV ad *au*: ma le forze son come i volumi, o le masse moltiplicate per le velocità; ond'esse sono come AVV ad *auu*.

Supponiamo A = 2, ed *a* = 1: è manifesto, che se uguali fossero le velocità, la quantità di molecule, ch'urtano A, sarebbe a quella delle molecule ch'urtano *a* nello stesso tempo, come 2 ad 1 (*N.*491.); e così A sarebbe urtato da una massa d'acqua doppia di quella, ch'urterebbe *a*. Ora supponiamo V = 3, ed *u* = 1: il piano A, trovandosi ur-

urtato con una velocità tripla di quella con cui è urtato il piano *a*, sarà in conseguenza urtato con una massa tripla della precedente; così questa massa sarà sestupla di quella, che urta *a*, cioè le masse, ch' urteranno A, *a*, saran fra loro come *6* ad 1. Ma per avere le forze conviene moltiplicar le masse per le velocità *3*, 1; onde queste forze sono come *3* × *6*, ed 1, o come il piano 2 moltiplicato pel quadro *9* della velocità 3 è al piano 1 moltiplicato pel quadro 1 della velocità 1, e così in altri casi.

494. PROPOSIZIONE LXXXIII. *Determinar le forze degli urti di due fluidi di differente natura, che urtan due piani colla medesima direzione.*

Primieramente, se supponesi ch' uguali sieno i piani A, B, e le velocità, le quantità di molecule, ch' urteranno i due piani, saran fra loro uguali. Ora supponendosi i fluidi di natura differente, ed in conseguenza di differente densità, le masse di queste quantità di molecule saranno fra loro come le densità; però le forze in tal caso, essendo come le masse moltiplicate per le velocità, saran pure come le densità moltiplicate per le velocità. Ma le velocità son' uguali; onde le forze degli urti saranno fra loro come le densità.

In secondo luogo, se le velocità son' uguali, e i piani disuguali, le quantità di molecule, ch' urtano i piani in un medesimo tempo, saranno non solo nel rapporto de' piani (*N.*491.), ma eziandio in ragione delle densità; e così queste quantità di molecule, o masse saran come i prodotti de' piani per le densità. Ma le forze degli urti sono fra loro come i prodotti delle masse per le velocità, e le velocità son' uguali; onde le forze degli urti saran come le masse, o come i prodotti de' piani per le densità.

In terzo luogo, se le velocità son disuguali, e i piani uguali, le quantità di molecule, ch' urteranno i piani in un medesimo tempo, saranno in ragione delle velocità, ed in quella delle densità; e però queste quantità di molecule, o masse saran come i prodotti delle densità per le velocità. Ma le forze degli urti son come i prodotti delle masse per le velocità; onde queste forze sono fra loro come i prodotti delle densità per le velocità moltiplicati per le velocità, cioè come le densità moltiplicate per i quadri delle velocità.

Se finalmente disuguali sono le velocità e i piani, le quantità di molecule saranno fra loro in ragione de' piani, delle velocità, e densità; e però esse saran come i prodotti de' piani, delle velocità, e densità. Ma le forze degli urti sono fra loro come i prodotti delle quantità di molecule, o delle masse per le velocità; onde

de queste forze son come i prodotti de' piani, delle densità, e velocità moltiplicati per le velocità, cioè come i prodotti dei piani, e delle densità moltiplicati per i quadri delle velocità, ovvero in ragion composta della ragione de' piani, delle densità, e de' quadrati delle velocità.

495. Così chiamando A il primo piano, ed *a* il secondo; V la velocità del fluido che urta A, e D la sua densità; *u* la velocità dell' altro fluido, e *d* la sua densità; F la forza dell' urto del primo fluido, ed *f* quella dell' urto del secondo; e facendo la ragione A × D × VV, *aduu*, ch' è la composta delle ragioni de' piani, delle densità e de' quadri delle velocità, ed F. *f* :: A × D × VV. *aduu* corrisponderà quest' analogia a tutt' i casi.

Perchè, se si fa V = *u*, ed A = *a*, s' avrà F. *f* :: D. *d*, siccome s' è veduto. E se V = *u*, e 'l resto è disuguale, s' avrà F. *f* :: A × D. *ad*, come abbiam parimente veduto; e così negli altri casi.

AVVERTIMENTO. Ciò che nelle due precedenti Proposizioni s' è detto rispetto ai fluidi ch' urtano de' piani, i quali non si muovono, dee pure intendersi di que' piani, che si muoverebbero in fluidi quieti; essendo manifesto che la resistenza, cui proverebbero questi piani dalla parte de' fluidi, equivarrebbe alla forza dell' urto, che gli stessi proverebbono, se fossero in quiete, ed i fluidi venissero ad urtarli colla velocità, con cui essi si muovono.

496. PROPOSIZIONE LXXXIV. *Se un fluido urta obbliquamente una retta* AB (Fig. 237.) *secondo delle linee parallele* AC, DB, *la sua velocità assoluta è alla relativa, come il seno totale è a quello dell' angolo d' incidenza.*

Supponiamo, che la velocità assoluta sia espressa dalla retta AC: dal punto C io tiro la retta CF perpendicolare ad AB, e secondo le leggi del moto composto la velocità AC è equivalente alle due CF, FA. Ma la velocità FA nulla opera sulla linea AB, che l' è parallela; dunque 'l fluido non opera sopra AB che con la velocità CF. Ora, pigliando CA pel seno totale, la retta CF è quello dell' angolo d' inclinazione CAF del fluido sulla linea AB; onde la velocità assoluta del fluido è alla relativa, come il seno totale è al seno dell' angolo d' inclinazione.

497. COROLLARIO I°. *La massa del fluido, ch' urta indirettamente la linea* AB, *è a quella che l' urterebbe direttamente, come il seno dell' angolo d' incidenza al seno totale.*

Dal punto B tiro la perpendicolare BE sopra AC, e tante sono

le

le goccie d'acqua ch'urtano AB, quante son quelle ch'urterebbero la retta BE, su cui esse son perpendicolari. Perciò 'l numero di goccie d'acqua, ch'urtano AB, è espresso dalla retta BE; dove all'incontro, se AB fosse urtata direttamente, il numero di goccie, che l'urterebbono, sarebb'espresso da AB. Ma noi supponiamo la velocità uguale nell'urto diretto, e nell'indiretto; onde il volume dell'urto obbliquo è a quello del diretto, come EB ad AB. Quindi, pigliando AB per seno totale, la retta EB sarà 'l seno dell'angolo CAB d'incidenza del fluido; e però la massa dell'urto obbliquo è a quella del diretto, come il seno dell'angolo d'incidenza al seno totale.

498. COROLLARIO II. *La forza dell'urto obbliquo del fluido contro la retta* AB *è a quella, con che esso l'urterebbe direttamente, come il quadrato del seno dell'angolo d'incidenza è al quadro del seno totale.*

La velocità assoluta è alla rispettiva, come il seno totale è al seno dell'angolo d'incidenza (*N.* 496.); e 'l volume, o la massa, ch'urterebbe direttamente, è al volume, ch'urta indirettamente, nella medesima ragione del seno totale al seno dell'angolo d'incidenza (*N.* 497.): ora la forza, ch'urterà direttamente, è 'l prodotto della massa diretta per la velocità assoluta, e la forza, ch'urta indirettamente, è quello della massa, ch'urta indirettamente, per la sua velocità relativa; onde queste due forze sono fra loro, come il prodotto del seno totale pel seno totale è al prodotto del seno dell'angolo d'incidenza per lo stesso seno, o come il quadro del seno totale è al quadro del seno dell'angolo d'incidenza; e però la forza dell'urto indiretto è a quella del diretto, come il quadro del seno dell'angolo d'incidenza è a quello del seno totale.

499. COROLLARIO III. *Se descrivendo intorno alla linea* AB *un semicircolo* AEB, *dal punto* B *tirasi la retta* BE *al punto* E, *in cui la direzione* CA *sega 'l circolo, e dal punto* E *una retta* EH *perpendicolare ad* AB, *la forza dell'urto diretto sarà a quella dell'obbliquo, come il diametro* AB *è alla sua parte* BH.

Poichè, a motivo de' triangoli simili AEB, BEH, noi abbiamo AB . BE : : BE . BH; dunque $\overline{AB}^2 . \overline{BE}^2$: : AB . BH: ma pel Corollario precedente la forza dell'urto diretto è a quella dell'obbliquo, come $\overline{AB}^2$ a $\overline{BE}^2$; onde queste due forze son pure come AB, BH.

500. COROLLARIO IV. Per mezzo di detto Corollario si può agevolmente trovar' il rapporto delle differenti forze degli urti d'un medesimo fluido, che colla medesima velocità urterebbe una stessa linea sotto differenti direzioni. Se p. e. si cercasse la forza dell'

urto

urto sotto la direzione RA, dal punto R s' abbassere bbe la retta RF perpendicolare ad AB, ed in conseguenza la forza dell' urto diretto sarebbe a quella dell' obbliquo sotto la direzione AR, come AB a BF: ma la stessa forza dell' urto diretto sarebbe a quella dell' obbliquo sotto la direzione AC, come AB a BH; perciò, chiamando F la forza dell' urto diretto, O la forza dell' obbliquo sotto la direzione CA, ed *o* quella dell' urto obbliquo sotto la direzione RA, avremo dall' una F. O :: BA. BH, ovvero F. BA :: O. BH, e dall'altra parte F. *o* :: BA. BF, od F. BA :: *o*. BF; dunque O. BH :: *o*. BF, ovvero O. *o* :: BH. BF, cioè la forza dell' urto obbliquo sotto la direzione CA è a quella dell' obbliquo sotto la direzione RA, come BH a BF; e così negli altri casi.

501. COROLLARIO V. Se 'l fluido urtasse direttamente la retta AB, il volume, che urterebbe, saria come la linea AB moltiplicata per la velocità, poichè questo volume diventa tanto maggiore, quanto più cresce la velocità (*N.*490.); così chiamando V la velocità, il volume, ch' urterebbe direttamente, saria $AB \times V$, e però la forza dell' urto sarebbe $AB \times V \times V$, ovvero $AB \times V^2$: ma egli s' è veduto, che l' urto diretto è all' indiretto sotto la direzione AC, come AB. BH; onde, facendo AB. BH :: AB $\times V^2 . \frac{BH \times AB \times V^2}{AB} = BH \times V^2$, questo quarto termine BH $\times V^2$ esprimerà la forza dell' urto sotto la direzione AC, e per la medesima ragione troveremo, che $BF \times V^2$ esprime la forza dell' urto sotto la direzione AR; e così negli altri casi.

502. COROLLARIO VI. Se la velocità sotto la direzione AC foss' espressa da V, e sotto la direzione RA da *u*, la forza dell' urto sotto la direzione AC sarebbe $BH \times V^2$, e quella dell' urto sotto la direzione RA saria $BF \times u^2$.

Se la velocità del fluido, ch' urta sotto la direzione AC, fosse $= V$, e la sua densità $= D$, e che la velocità del fluido, ch' urta sotto la direzione RA, fosse $= u$, e *d* la sua densità, l' urto diretto del primo fluido sarebbe $AC \times D \times V^2$, e 'l suo urto sotto la direzione AC saria $BH \times B \times V^2$: così pure l' urto diretto del secondo fluido sarebbe $AC \times d \times u^2$, e 'l suo vrto sotto la direzione RA saria $BF \times d \times u^2$; tal che l' urto obbliquo del primo fluido sotto la direzione AC sarebbe all' urto obbliquo del secondo sotto la direzione RA, come $BH \times D \times V^2$ a $BF \times d \times u^2$, e così negli altri casi.

FINE DEL TERZO, ED ULTIMO LIBRO.

TAVOLA
DE' CAPITOLI E DE' TITOLI
CONTENUTI IN QUESTO TERZO VOLUME.

LIBRO TERZO,

Che contiene le Regole dell' Aritmetica degl' Infiniti, e la loro applicazione alla Geometria; la Meccanica; la Statica; l' Idrostatica; l' Areometria, e l' Idraulica.

I L F I N E.

ERRATA	CORRIGE.
Pag. 14. lib. 8 $a^{\frac{3}{1}}$	leg. $a^{\frac{1}{4}}$
Pag. 23. lin. 11 $\times$ o	leg. $\times$ o
Pag. 34. lin. 33 $\times$)	leg. $\times$ (
Pag. 43. lin. 24. qET	leg qEt
Pag. 109. lin. 1 $-\frac{1}{2}$V	leg. $-\frac{1}{2}$V
Pag. 143. lin. 26 descrivereb-besi della	leg. che descriverebbesi dalla
Pag. 145. lin. 13 MM	leg. MN
Pag. 152. lin. 26. non	leg. noi
Pag. 180. lin. 23 quelli punti	leg. quelli
Pag. 203. lin. 29 $\frac{MC \times B}{CB}$	leg. $\frac{MC \times P}{CB}$
Pag. 224. lin. 3 N°. 141	leg. N°. 411.

21
22
25
26
27
29
30
31
32

35
T
E
H
D
R
A
B
C
b
P
V
37
M
N
R
Z
C
X
40
C
P
L
T
M
N
X
R
V
S
Q
A
Q H
B
z
z
33

42
C
V
Z
M
H
R
Q
A
B
P
S
45
E
Z
H
P
D
R
B
46
B
N
S
P
A
M
T
R
C
48
B
A
N
T
R
S
H
E
O
P
M
49
O
A
S
B
51
C
S
M
E
A
P
T
V
H

54
L S R
A B C
Z
H X
V F
M N P Q
57
A B
D
59
60
A E P
B H D C
62
M N T
E A X B H
S
Q V
64
N X
P
H
66
S
E T L
V
C
B H
O
A
V
N
H Z
M P N
R
35

68
R
T
S
C
M
A
N
E
70
R
X
V
H
C
N
B
T
O
S
A
M
72
A
B
C
N
73
A
C
B
M
75
S
C
N
M
B
R
B
C
76
A
M
B
H
D
79
N
C
M
A
B
H
D
E
L
S
C
T
D
O
R
82
P
L
S
C
H
V
D
M
T
Q
O
R
C
L
D

85 B C M A N

86 C B A M N

87 A C B M N

F D N

90 B C A D M N

92 P o t s c p k h q b f d r i g a m n

F

94

95 P Q H V X A M C D N

n

98
100
104
105
108
109
112
113

115
C
V
N
116
B
C
X
Z
V
A
D
P
L
H
118
C
Z
N
119
A
D
O
B
C
120
B
E
X
H
V
M
N
T
P
Z
A
E
O
B
R
Z
X
T
H
C
S
D
124
a
o
e
b
r
x
t
h
c
s
d
N
127
M
B
N
T
V
F
E
C
126
A
Q
P

130
133
134
136
137
139
140
142

146
149
150
154
157
158
163
164
165

168
167
169
170
172
173
175
176
178
179
181
182
83
184

Tavola 13.

187

190

191

192

195

197

198

201

204

207

210

213

6

217

218

20
E F
C D
B
221
A H V
F
E
D
C
B M
A
S
223
T
H
B
M
P
C V L
225
a a
b c
c
226
A
D
B
227
A M
C
B
229
M
B B
C
N
S
A

231

235

236

237